Révisions R7

Particules chargées

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

Cartes mémo, réalisées par C. Cayssiols.

Vidéos, réalisées par JJ. Fleck.
Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adpatées à des révisions.

QCM d'applications.
Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

Rappels de cours

A - Mouvement conservatif dans un potentiel électrostatique

Considérons par exemple un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur), distantes de L le long de l'axe (Ox), soumises à une tension $U = V(0) - V(L)$. Une particule de charge q est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $x = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième.

- **Signe de U**

La particule subit la force de Lorentz électrostatique $q\vec{E}$. On rappelle également que $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants. Ainsi, une charge positive se dirige vers les potentiels décroissants : pour l'accélérer, il faut donc avoir $V(L) < V(0)$ soit $U > 0$. On montre de même qu'il faut avoir $U < 0$ si $q < 0$. Finalement, pour que la particule soit accélérée comme voulu, U doit donc être du même signe que q.

- **Vitesse dans l'espace inter-armatures**

On exploite ensuite la conservation de l'énergie mécanique de la particule entre sa position initiale et une position x quelconque :

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow \\ x\,=\,0}}{=} 0 + qV(0) \underset{\substack{\uparrow \\ x\ \mathrm{qcq}}}{=} \frac{1}{2}mv(x)^2 + qV(x)\,,$$

le potentiel $V(x)$ pouvant être calculé par l'équation de Poisson ou par intégration du champ électrique.

> ***Remarque :*** *La démarche énergétique est de toute façon la première idée à laquelle penser lorsque l'on cherche la vitesse en fonction de la position plutôt qu'en fonction du temps.*

B - Mouvement cyclotron

Considérons une particule de charge q quelconque, placée dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et dont le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonal au champ magnétique. Le mouvement de la particule dans ces conditions est appelé **mouvement cyclotron**, et les paramètres caractéristiques de ce mouvement sont les **paramètres cyclotron**.

Bilan des actions mécaniques :

- ▷ force de Lorentz magnétique : $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$;
- ▷ poids négligé de manière systématique pour une particule microscopique.

• Le mouvement est uniforme

D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\mathrm{c} = \text{cte} \qquad \text{d'où} \qquad v = ||\vec{v}|| = \text{cte} = v_0\,.$$

Le mouvement cyclotron est uniforme, c'est-à-dire qu'il se fait à vitesse constante.

• Nature de la trajectoire

Pour établir le caractère circulaire du mouvement, le plus simple est de se placer dans le repère de Frénet, dont on rappelle que les vecteurs de base sont $\vec{t}$, tangent à la trajectoire, et $\vec{n}$, normal à la trajectoire dirigé vers l'intérieur de la courbure. En toute généralité, les vecteurs cinématiques s'écrivent alors

$$\vec{v} = v\,\vec{t} \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}\,,$$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire.

Dans le cas de la particule chargée, puisque $\vec{v} \perp \vec{B}$ le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + m\frac{v^2}{R}\vec{n} = |q|\,vB\,\vec{n}\,.$$

En effet, la force de Lorentz est la seule force à même de dévier la particule chargée, elle est donc forcément dirigée vers l'intérieur de la trajectoire, c'est-à-dire portée par $\vec{n}$, comme le montre la figure 1.

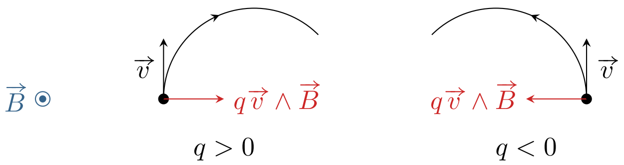


Figure 1 – Sens de la force de Lorentz. Connaissant la vitesse $\vec{v}$ et le signe de q, on construit la force de Lorentz, puis on en déduit le sens dans lequel est déviée la particule soumise à cette force uniquement. Ces schémas permettent de se convaincre et/ou de retrouver que la force de Lorentz est toujours portée par le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ de la base de Frénet.

Le mouvement étant par hypothèse uniforme, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ et ainsi

$$m\frac{v^2}{R} = |q|\,vB \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R = \frac{mv}{|q|\,B}\,.}$$

Le rayon de courbure étant constant, la trajectoire est un cercle.

La trajectoire cyclotron est un cercle de rayon $R_\mathrm{c} = \dfrac{mv}{|q|\,B}$ appelé **rayon cyclotron**.

Attention toutefois, le sens de parcours du cercle dépend du signe de la charge. Imaginons que la particule passe en un point de sa trajectoire avec une vitesse $\vec{v}$. En reprenant les mêmes schémas de la figure 1, on conclut qu'une particule de charge positive parcourt la trajectoire en sens horaire ($\dot{\theta} < 0$), une particule de charge négative en sens trigonométrique ($\dot{\theta} > 0$).

La trajectoire cyclotron est un cercle dont le sens de parcours dépend du signe de la charge.

- **Retrouver le rayon cyclotron en coordonnées polaires**

La nature circulaire du mouvement permet alors d'utiliser les coordonnées polaires, plus familières et plus simples à manipuler que la base de Frénet. Il arrive que les énoncés admettent d'emblée la nature circulaire du mouvement pour travailler uniquement avec les coordonnées polaires.

L'expression s'obtient à partir du PFD en faisant apparaître « partout » la norme de la vitesse. Comme les écritures dépendent directement du signe de q, on suppose pour simplifier $q > 0$ donc $\dot\theta < 0$ soit $\vec{v} = -v\,\vec{e}_\theta$. Comme le mouvement est circulaire uniforme,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad\rightsquigarrow\qquad -m\frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec{e}_r = q(-v\,\vec{e}_\theta\wedge B\,\vec{e}_z) \qquad\rightsquigarrow\qquad -m\frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec{e}_r = -qvB\,\vec{e}_r\,.$$

En simplifiant cette expression, on retrouve le résultat précédent.

- **Pulsation cyclotron**

On appelle **pulsation cyclotron** la (valeur absolue de la) vitesse angulaire de la particule. Elle s'obtient à partir du PFD en faisant apparaître « partout » la vitesse angulaire. Comme le mouvement est circulaire uniforme,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad\rightsquigarrow\qquad -m\frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec{e}_r = q(R_\mathrm{c}\dot\theta\,\vec{e}_\theta\wedge B\,\vec{e}_z) \qquad\rightsquigarrow\qquad -m\frac{{R_\mathrm{c}}^2\dot\theta^2}{R_\mathrm{c}}\vec{e}_r = qR_\mathrm{c}B\dot\theta\,\vec{e}_r\,.$$

En simplifiant l'expression ci-dessus, on en déduit

La trajectoire cyclotron est parcourue à la vitesse angulaire $\omega_\mathrm{c} = \left|\dot\theta\right| = \dfrac{|q|\,B}{m}$.

- **Lien entre pulsation et rayon cyclotron**

La pulsation et le rayon cyclotron sont reliés de manière très simple :

$$||\vec{v}|| = R\left|\dot\theta\right| \qquad\rightsquigarrow\qquad v = R_\mathrm{c}\omega_\mathrm{c}$$

Quand on connaît l'un, il est donc inutile de repasser par le PFD pour exprimer l'autre.

Si aucune démarche n'est imposée, le plus simple est d'utiliser le TEC pour montrer que le mouvement est uniforme, puis le PFD et la base de Frénet pour montrer qu'il est circulaire et identifier le rayon du cercle, et enfin la relation ci-dessus pour identifier la pulsation cyclotron.

Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

R6.1 - On considère un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur) distantes de L le long de l'axe (Ox). Elles sont soumises à une tension $U = V(x=0) - V(x=L)$. Une particule de charge $q > 0$ est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $x = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième. Identifier le sens de $\vec{E}$ puis le signe de U pour que ce soit possible ? Déterminer la vitesse avec laquelle l'électrode située en $x = L$ est atteinte.

> *Une charge positive subit une force de Lorentz dirigée dans le même sens que $\vec{E}$, donc ici selon $+\vec{e}_x$. Le champ étant dirigé vers les potentiels décroissants, on en déduit qu'on doit avoir $V(x=L) < V(x=0)$ soit $U > 0$. La vitesse finale s'obtient par la conservation de l'énergie mécanique,*
>
> $$E_m \underset{\substack{\uparrow\\x=0}}{=} 0 + qV(0) \underset{\substack{\uparrow\\x=L}}{=} \frac{1}{2}mv(L)^{\,2} + qV(L) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}\,.$$

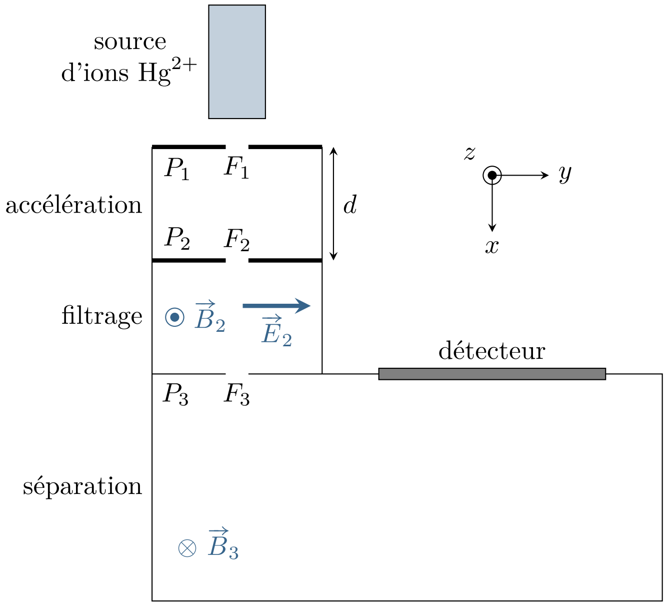
(★) R6.2 - On considère une particule de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. On suppose le vecteur vitesse initiale orthogonal à $\vec{B}$. Montrer que le mouvement est uniforme ; qu'il s'agit d'un cercle dont on déterminera le rayon ; et enfin définir et déterminer la pulsation cyclotron.

Pour s'entraîner

Exercice 1 : Spectrométrie de masse

2 | 2 |

▷ *Mouvement dans un champ électrostatique ;*
▷ *Mouvement cyclotron.*



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse ou la charge d'un ion (plus précisémment le rapport entre les deux). De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique ».

Dans le dispositif étudié ici, une source émet des ions mercure $^{200}_{80}Hg^{2+}$ et $^{202}_{80}Hg^{2+}$. Les deux ions ont la même charge, mais leur masse diffère : c'est donc elle que le spectromètre permet de déterminer. Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente F_1. Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la charge ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y.

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple m (pour un calcul littéral) et m_{200} ou m_{202} pour les applications numériques.

A - Accélération des ions

Un ion mercure, de masse m et charge $2e$ entre dans le spectromètre par la fente F_1. On néglige sa vitesse initiale. Une tension U appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2.

1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ?

2 - Établir l'expression littérale de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2.

3 - On trouve numériquement des vitesses valant $1{,}38 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $1{,}39 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible ?

B - Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F_2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P_2 et P_3, il règne un champ électromagnétique uniforme composé d'un champ électrique $\vec{E}_2 = E_2\,\vec{e}_y$ et d'un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2\,\vec{e}_z$. On suit un ion qui traverse la plaque P_2 par la fente F_2 avec une vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$.

4 - À quelle condition sur les forces qu'il subit l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de F_2 à F_3 ?

5 - En déduire que seuls les ions de vitesse $v = v_0 = E_2/B_2$ parviennent en F_3.

6 - Numériquement, $v_0 = 1{,}38 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. En déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

C - Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_2 pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de B_2 reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente F_3 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$, l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_3 = -B_3\,\vec{e}_z$ valant $200\ \mathrm{mT}$. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y.

7 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.

8 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.

9 - Numériquement, on trouve respectivement 71,8 cm et 72,5 cm pour les deux isotopes. En déduire les abscisses y_{200} et y_{202} des points d'impact de chaque type d'ion sur le détecteur, l'origine $y = 0$ étant prise au centre de la fente F_3.

10 - Les charges totales accumulées valent respectivement $Q_1 = 3{,}85 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ pour la plus petite valeur de y et $Q_2 = 1{,}15 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ pour la plus élevée. En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.

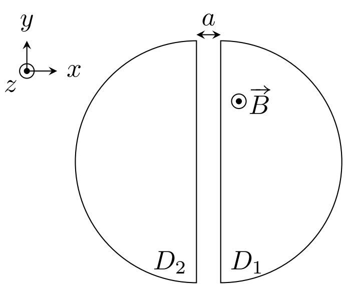
Exercice 2 : Cyclotron — inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT | 2 | 2

▷ *Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.*

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2, appelées « dees » en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a. Les dees sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e}_z$, de norme $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$. Une tension harmonique u d'amplitude $U_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kV}$ est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne un champ électrique orienté selon $\overrightarrow{e}_x$.

On injecte des protons au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

Données : masse d'un proton $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



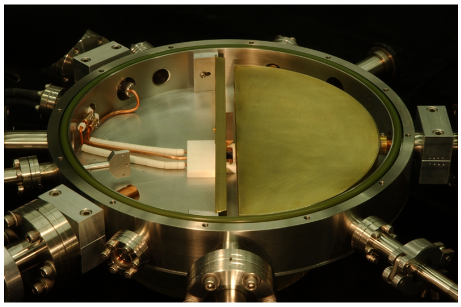


Figure 2 – **Étude d'un cyclotron.** Schéma de principe et photo du cyclotron de l'université de Rutgers, qui mesure une trentaine de centimètres de diamètre.

1 - Montrer qu'à l'intérieur d'un dee la norme de la vitesse des protons est constante.

2 - En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un dee.

3 - Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dee ? Pour simplifier, on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension créneau.

4 - Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.

5 - Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque dee), puis après dix tours.

Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35\,\mathrm{cm}$.

6 - Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron puis le nombre de tours parcourus par le proton.