BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Fiche de révisions R1

Correction

Électronique

Exercice 1 : Condensateur alimenté par deux générateurs — oral CCINP MP | 2 | 1

- *Équation différentielle du premier ordre ;*
- *Puissance électrique.*

1 Raisonnons avec les notations de la figure 1 pour $t > 0$.

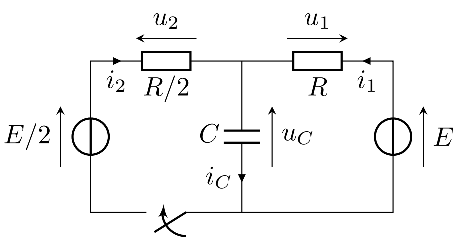


Figure 1 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $$i_C = i_1 + i_2$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2u_1}{R} + \frac{u_2}{R}$$

Loi des mailles : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\frac{E/2 - u_C}{R} + \frac{E - u_C}{R}$$

Donc $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R}u_C$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{RC}u_C = \frac{2E}{RC}\,.}$$

2 Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

- Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle
$$0 + \frac{3}{RC}u_\mathrm{p} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{p} = \frac{2}{3}E\,.$$
- Solution homogène : $u_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
- Conclusion :
$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

Détermination de la constante d'intégration :

$$u_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A + \frac{2}{3}E \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc
$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \frac{101}{100}$$

soit
$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$$

d'où
$$\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02 = 3{,}9\,\tau\,.}$$

> *Le fait de trouver ici environ 4τ n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps 5τ pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la* valeur finale, *mais pas à* l'amplitude de l'échelon *de tension. La condition initiale fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.*

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E - u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2\,.$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\dfrac{E}{2} - u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2\,.$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 4\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{3}{2}\right]\,.}$$

Lorsque $t \to \infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R}\,.$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles

oral Mines-Télécom PSI | 3 | 2

▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
▷ *Recherche de condition initiale.*

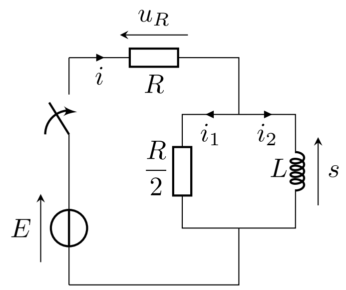


Figure 2 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

▷ *Première méthode : approche temporelle*

Avec les notations de la figure 2,

$$
\begin{aligned}
&\text{Loi des nœuds :} && i = i_1 + i_2 \\
&\text{Dérivation :} && \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
&\text{Lois de comportement :} && \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
&\text{Loi des mailles :} && \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
& && -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} \\
& && \frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0 \\
&\text{Finalement :} && \boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}
\end{aligned}
$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

▷ *Deuxième méthode : approche fréquentielle*

L'association de la bobine et de la résistance $R/2$ a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance R,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\underline{Z_{\text{éq}}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}\right)\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{soit} \qquad 3\underline{S} + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}\underline{S} = \underline{E}\,.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en $\mathrm{j}\omega$,

$$3\mathrm{j}\omega\,\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E} \qquad \text{d'où} \qquad 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $e = E = \text{cte}$ la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0\,.}$$

> ***Moralité :*** *L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier e lorsqu'elle est constante.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▷ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds : $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

Continuité de i_2 : $i(0^+) = i_1(0^+)$

Lois de comportement : $\dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Loi des mailles : $\dfrac{E - s(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Donc : $E = 3s(0^+)$

Finalement : $\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{3}\,.}$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est **absolument inutile** de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne **pas du tout** sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
>
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{3} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 3.

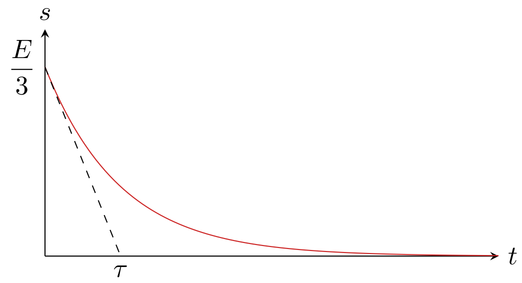
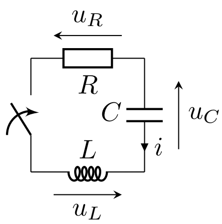


Figure 3 – **Courbe représentant la tension s en fonction du temps.**

Exercice 3 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 1 | 2

▷ *Équation différentielle du second ordre ;*
▷ *Montage expérimental.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

