



BLAISE PASCAL  
PT 2023-2024

Révisions R4

# Théorèmes de la mécanique

Cette fiche de révision ne couvre que l'utilisation des théorèmes de la mécanique dans les cas « génériques ». L'application aux particules chargées et aux satellites et planètes sera révisée ultérieurement.

## Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.



**Cartes mémo**, réalisées par C. Cayssiols.



**Vidéos**, réalisées par JJ. Fleck.

Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adaptées à des révisions.



**QCM d'applications.**

Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

## Rappels de cours

### A - Théorèmes de mécanique

#### A.1 - Principe fondamental de la dynamique

- **Autre nom** : seconde loi de Newton.
- **Hypothèses** : point matériel  $M$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \\ \vec{F}_n \text{ force exercée sur le point matériel } M. \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère** :
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par  $\vec{v}$  ;
  - ▷ si la vitesse  $\vec{v}_M(t)$  est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support).
- **Remarques** :
  - ▷ il n'y a pas d'intérieur pour un point matériel, donc parler de force extérieure n'a pas de sens ;
  - ▷ toutes les autres lois données ici sont des conséquences du PFD ; les seuls postulats de la mécanique newtonienne sont les trois lois de Newton : le principe d'inertie (qui postule l'existence des référentiels galiléens), le principe fondamental de la dynamique et le principe des actions réciproques.

## A.2 - Théorème de la résultante cinétique

- **Autres noms** : loi de la quantité de mouvement, théorème du centre d'inertie.
- **Hypothèses** : solide indéformable  $\mathcal{S}$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \\ \vec{F}_n \text{ force } \mathbf{extérieure} \text{ exercée sur le solide } \mathcal{S}. \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère** :
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}_G$  du centre de masse  $G$  du solide indéformable  $\mathcal{S}$ ; en revanche, le TRC n'apporte aucune information sur le mouvement des autres points du solide;
  - ▷ si la vitesse  $\vec{v}_G(t)$  est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support) et les forces exercées par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système une vitesse constante).
- **Remarque** : on vous pardonnera l'abus de langage consistant à appeler « PFD » le TRC.

## A.3 - Théorème du moment cinétique vectoriel

- **Hypothèses** : point matériel  $M$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \text{ un point } \mathbf{fixe} \text{ dans } \mathcal{R} \\ \vec{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \vec{AM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n) = \vec{AM} \wedge \vec{F}_n \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère** :
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par  $\vec{v}$  ... le TMC apporte donc exactement la même information que le PFD, qui est souvent plus simple à utiliser : il sert très peu en tant que tel;
  - ▷ l'utilisation la plus classique est le cas de conservation : si la somme des moments des forces est nulle, alors  $\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}$  est constant, et donc le mouvement est plan car  $\vec{AM}$  est orthogonal à  $\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}$ .
- **Remarques** :
  - ▷ Dans une écriture abrégée, on peut très vite ne plus préciser  $M$  et  $\mathcal{R}$ , en revanche il faut toujours garder dans les écritures le point par rapport auquel les moments sont calculés. L'écriture la plus compacte possible est donc  $\vec{L}_A$ .
  - ▷ Il existe une version du TMC vectoriel pour un solide, utilisant la matrice d'inertie : elle est au programme de SI mais pas de physique.

## A.4 - Théorème du moment cinétique scalaire

- **Hypothèses** : solide indéformable  $\mathcal{S}$  ou éventuellement point matériel  $M$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** :

$$\boxed{\left. \frac{dL_{z,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \mathcal{M}_z(\vec{F}_n)}$$

avec, dans le cas d'un solide en rotation autour de l'axe  $(Oz)$ ,

- ▷  $L_{z,M/\mathcal{R}} = J\omega = J\dot{\theta}$ , où  $J$  est le moment d'inertie du solide indéformable  $\mathcal{S}$  par rapport à l'axe de rotation et  $\omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe;
- ▷  $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = (\vec{AM}_F \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$ , où  $A$  est un point appartenant à l'axe de rotation et  $M_F$  le point d'application de la force  $\vec{F}$ ;
- ▷  $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\|b$ , où  $b$  est le bras de levier, c'est-à-dire la distance du point d'application  $M_F$  à l'axe de rotation, et le signe  $\pm$  se détermine qualitativement ( $\oplus$  si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide en sens trigonométrique autour de l'axe de rotation,  $\ominus$  si c'est en sens horaire).

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**

- ▷ si tous les moments sont connus, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  ;
- ▷ si la vitesse angulaire  $\omega(t)$  est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des moments inconnus, en particulier les moments de liaison et ceux exercés par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système de tourner à vitesse angulaire constante).

- **Remarques :**

- ▷ calculer un moment par le bras de levier n'est efficace que lorsque le bras de levier est évident, autrement il est plus prudent de passer par les vecteurs et les projections ;
- ▷ le TMC scalaire est lui aussi rarement utile pour un point matériel ... bien que valable !
- ▷ le moment vectoriel d'une force est un vecteur, le moment scalaire est ... un scalaire ! Attention aux flèches dans vos copies.

### A.5 - Théorème de l'énergie cinétique : version instantanée

- **Autre nom :** théorème de la puissance cinétique.

- **Hypothèses :** point matériel  $M$  ou solide indéformable  $\mathcal{S}$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

- **Mathématiquement :**

$$\left. \frac{dE_{c,S/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_n$$

Les expressions de l'énergie cinétique et des puissances diffèrent selon le mouvement du solide :

- ▷ pour une translation le long d'un axe ( $Oz$ ),

$$E_c = \frac{1}{2}mv_z^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n = \vec{F}_n \cdot \vec{v}_{S/\mathcal{R}}$$

- ▷ pour une rotation autour d'un axe ( $Oz$ ),

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n = \mathcal{M}_z(\vec{F}_n)\dot{\theta}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**

- ▷ si toutes les puissances sont connues, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par  $v = \|\vec{v}\|$  (resp.  $\dot{\theta}$ ), mais dans le cas général d'un point matériel elle contient moins d'information que celle issue du PFD (équation vectorielle équivalente à trois équations scalaires) ;
- ▷ une utilisation très classique est le cas de conservation : si la somme des puissances est nulle, alors  $E_c$  et donc  $v$  (resp.  $\dot{\theta}$ ) est constante, ce qui signifie que le mouvement est uniforme.

- **Remarques :** le TEC instantané est exactement équivalent au TRC (projeté) pour une translation ou au TMC scalaire pour une rotation, à vous de choisir votre méthode préférée si vous devez établir l'équation différentielle du mouvement.

### A.6 - Théorème de l'énergie cinétique : version intégrale

- **Hypothèses :** point matériel  $M$  ou solide indéformable  $\mathcal{S}$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

- **Mathématiquement :** pour une trajectoire  $\widehat{AB}$ ,

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_{n=1}^N W_n \quad \text{avec} \quad W_n = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}_n \cdot d\vec{\ell}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**

- ▷ si toutes les forces sont connues, on en déduit la valeur de la vitesse  $v = \|\vec{v}\|$  au point d'arrivée connaissant la vitesse initiale ;
- ▷ si les vitesses de départ et d'arrivée sont connues, on peut en déduire l'énergie fournie ou prélevée au système par une force inconnue (p.ex. frottements, moteur, freinage, etc.) sans avoir besoin de calculer cette force ;
- ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

- **Remarques :** le TEC intégral sert assez rarement en pratique, car dans les situations où il serait utile il est presque toujours plus intéressant d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

### A.7 - Théorème de l'énergie mécanique : version instantanée

- **Autre nom** : théorème de la puissance mécanique.
- **Hypothèses** : point matériel  $M$  ou solide indéformable  $\mathcal{S}$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** :

$$\left. \frac{dE_m}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \mathcal{P}_{n,NC},$$

où la somme est cette fois restreinte aux puissances des seules actions mécaniques non conservatives.

L'utilisation la plus courante est le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas (p.ex. réaction normale), alors

$$\frac{dE_m}{dt} = 0.$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère** :
  - ▷ dans le cas de mouvements conservatifs à un degré de liberté étudiés en coordonnées polaires (mouvement circulaire), exprimer l'énergie mécanique en fonction des variables  $(\theta, \dot{\theta})$  puis la dériver permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement de manière beaucoup plus efficace que le PFD ;
  - ▷ cette méthode peut aussi être utile dans le cas de forces « originales » (p.ex. aimant, van der Waals, etc.) dont seule l'énergie potentielle serait donnée par un énoncé.

### A.8 - Théorème de l'énergie mécanique : version intégrale

- **Hypothèses** : point matériel  $M$  ou solide indéformable  $\mathcal{S}$  + référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .
- **Mathématiquement** : pour une trajectoire  $\widehat{AB}$ ,

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum_{n=1}^N W_{n,NC}$$

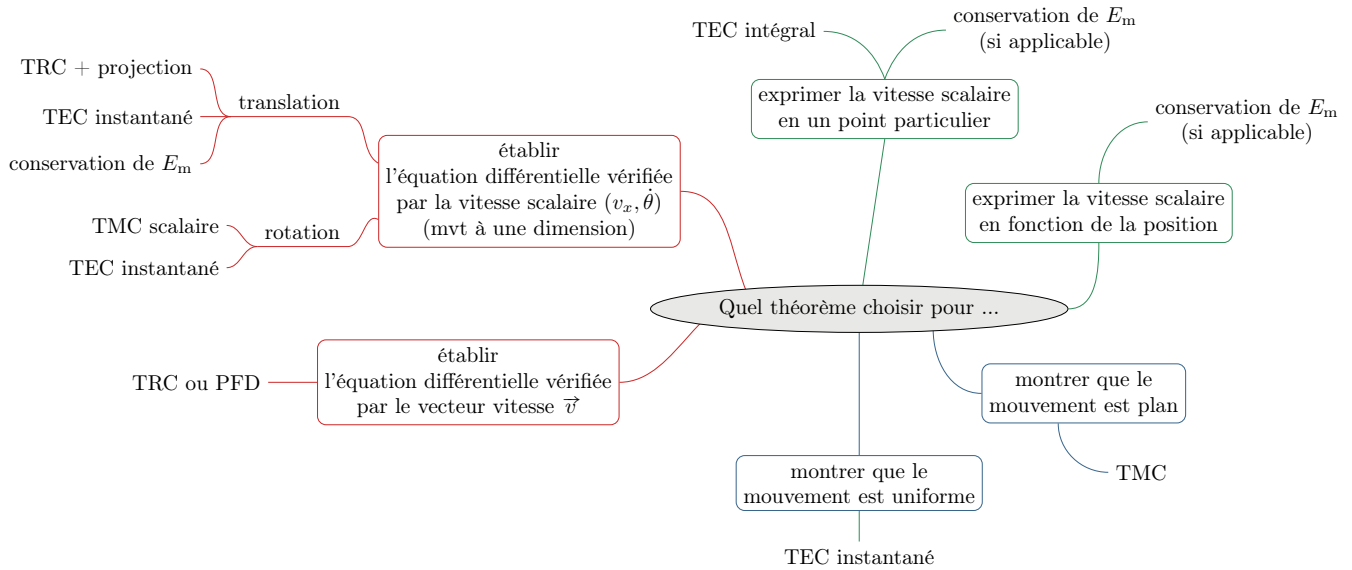
où la somme est restreinte aux travaux des seules actions mécaniques non conservatives.

La version intégrale du TEM ne sert pratiquement que dans le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas, alors

$$E_m = \text{cte} \quad \iff \quad \forall M, \quad E_m(M) = E_m(t=0)$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère** :
  - ▷ les énergies potentielles étant connues en fonction de la position, on en déduit la valeur de la vitesse  $v = \|\vec{v}\|$  en n'importe quel point de la trajectoire à partir des conditions initiales ;
  - ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

### B - Schéma bilan : quel théorème choisir ?



### C - Analogies formelles entre translation et rotation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
$z$ direction du mouvement	$z$ axe de rotation
Position $z$ Vitesse $\dot{z}$	Angle $\theta$ Vitesse angulaire $\dot{\theta}$
Masse $m$ Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie $J$ Moment cinétique $L_z = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\frac{dp_z}{dt} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$	Théorème du moment cinétique (scalaire) : $\frac{dL_z}{dt} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z \dot{z}$ Travail $W = \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$ Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z \dot{\theta}$ Travail $W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z d\theta$ Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$
Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(F_i)$ ↪ même équation que le PFD	Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ ↪ même équation que le TMC
Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\frac{1}{2}J\dot{\theta}_B^2 - \frac{1}{2}J\dot{\theta}_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$

### D - Formulaire de forces

#### D.1 - Poids

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{avec} \quad \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = \pm mgz + \text{cte} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} + & \text{si axe vers le haut} \\ - & \text{si axe vers le bas} \end{cases}$$

## D.2 - Force de rappel d'un ressort

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$$

avec  $k$  constante de raideur,  $\ell$  longueur instantanée du ressort,  $\ell_0$  longueur à vide et  $\vec{u}_{\text{ext}}$  le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort au point où il est attaché au système.

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

🚫🚫🚫 **Attention !** Il faut être méthodique pour exprimer  $\ell$  et  $\vec{u}_{\text{ext}}$  dans la base adaptée au problème ... mais surtout, **surtout**, SURTOUT on n'essaie pas d'avoir l'air intelligent en devinant les signes à partir d'un schéma : le sens de la force change si le ressort est comprimé ou étiré, le risque d'erreur est donc ... élevé.

## D.3 - Force de frottement fluide

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = -\beta\|\vec{v}\|\vec{v}$$

Le modèle de force (linéaire ou quadratique) et l'expression/la valeur des coefficients de frottement  $\alpha$  et  $\beta$  dépend de la nature de l'écoulement (nombre de Reynolds), de sa forme, de son état de surface, etc. Ce sont des paramètres empiriques dont il n'existe en général pas d'expression théorique.

↪ pour aller plus loin : voir cours de PT sur la viscosité.

## D.4 - Réaction du support

Il s'agit d'une action de liaison (entre le système et le support sur lequel il est posé), donc

$$\vec{R}_N \text{ et } \vec{R}_T \text{ n'ont pas d'expression générale!}$$

Cette idée que vous connaissez bien en SI (composantes inconnues dans le torseur d'une action de liaison) ne doit pas vous étonner en physique!

Les deux composantes normale et tangentielle sont reliées par les lois de Coulomb du frottement solide (qui doivent toujours vous être rappelées dans un énoncé de physique) :

▷ tant qu'il y a glissement,

$$\|\vec{v}_g\| > 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|;$$

▷ tant qu'il y a adhérence,

$$\|\vec{v}_g\| = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{R}_T\| < \mu_s \|\vec{R}_N\|;$$

avec  $\mu_s$  et  $\mu_d$  les coefficients de frottement statique et dynamique.

↪ pour aller plus loin : comme la formulation en « tant que ... » peut le laisser deviner, les questions de frottement solide se traitent par disjonction de cas, exactement comme celles avec un ALI en saturation.

## D.5 - Force de pression

Dans le cas simple d'une paroi plane soumise à une pression uniforme :

$$\vec{F}_P = PS\vec{n}$$

avec  $S$  la surface de la paroi et  $\vec{n}$  le vecteur normal à la paroi dirigé dans le sens qui conduirait le fluide à s'étaler.

↪ pour aller plus loin : voir cours de PT sur le calcul de la résultante des forces de pression.

## D.6 - Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression sur un solide totalement immergé, les prendre en compte séparément revient donc à faire deux fois la même chose.

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V_{\text{imm}} \vec{g} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho \text{ masse volumique du fluide} \\ V_{\text{imm}} \text{ volume immergé} \end{cases}$$

### D.7 - Force de gravitation

Force exercée par un corps de masse  $m_0$  situé en  $O$  (origine du repère) sur un autre corps de masse  $m$  situé en  $M$  :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

avec  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  la constante gravitationnelle, parfois appelée constante de Cavendish (in particular in english !)

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$E_{\text{pg}} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}$$

🌟🌟🌟 **Attention !** Par définition, le poids *est* la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet se trouvant à sa surface. Prendre en compte à la fois le poids et la force de gravitation dans un même bilan de forces (p.ex. sur une fusée qui décolle) revient donc à compter deux fois la même force.

### D.8 - Force de Coulomb

Force exercée par une charge  $q_0$  située en  $O$  (origine du repère) sur une autre charge  $q$  située en  $M$  :

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

avec  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  la permittivité diélectrique du vide.

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle coulombienne :

$$E_{\text{pC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

### D.9 - Force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

La partie magnétique ne travaille pas, la partie électrique dérive de l'énergie potentielle électrique :

$$E_{\text{pe}} = qV$$

avec  $V$  le potentiel électrique dont dérive le champ  $\vec{E}$ .

↪ pour aller plus loin : voir cours de PT sur le champ et le potentiel électrostatiques.

### D.10 - Force de Laplace

Force subie par un élément mésoscopique de circuit de longueur  $d\ell$  parcouru par un courant  $i$  :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

où le vecteur  $d\vec{\ell}$  est dirigé dans le sens choisi positif de  $i$  (= sens arbitraire indiqué par la flèche sur le circuit).

## Questions de cours

*Seuls les étudiants du groupe de TD PT\* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !*

**R5 - Préambule :** les lois de force ne feront pas l'objet de questions de cours posées en colle, mais il est clair que vous devez absolument toutes les connaître parfaitement ainsi que, le cas échéant, les énergies potentielles associées.

**R5.1 -** Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, d'abord dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, puis dans le cas général.

Ne pas oublier que  $r = \text{cte} \implies \dot{r} = 0$  et  $\ddot{r} = 0$  pour un mouvement circulaire, ce qui simplifie grandement le calcul.

(★) **R5.2 -** Rappeler **puis ensuite** démontrer l'expression de l'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme et la commenter.

La relation à établir est  $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$  ... ce qui est à connaître et à utiliser tel quel, et donc savoir énoncer sans démonstration !

- ▷ Bien que le mouvement soit uniforme, l'accélération n'est pas nulle!!! En effet, le vecteur vitesse n'est pas constant, seule sa norme l'est.
- ▷ Elle est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire, ce qui est logique car l'accélération est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

**R5.3** - Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre sans frottement, lancé avec une vitesse  $\vec{v}_0$  formant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

**R5.4** - Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires (**la méthode est imposée**).

**R5.5** - Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (**la méthode énergétique est imposée**). La résoudre pour des conditions initiales  $x(0) = X_0$  et  $v(0) = V_0$ .

**Méthode** : Schéma obligatoire pour définir les notations. Le système est la masse, on choisit le repère tel que la longueur du ressort soit  $x$ . Son énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2.$$

La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas, son énergie mécanique est donc constante. On en déduit

$$\frac{dE_m}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{m\dot{x}\ddot{x}} + k(x - \ell_0)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte}}}{\dot{x}} = 0,$$

ce qui permet de retrouver l'équation du mouvement en simplifiant par  $\dot{x}$ .

Pour trouver les constantes d'intégration, il est plus simple de raisonner sur la solution en cos + sin. Après calculs, on trouve

$$x(t) = \ell_0 + (X_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

**R5.6** - On lance à la verticale un projectile de masse  $m$  avec une vitesse  $v_0$ . Quelle hauteur maximale peut-il atteindre avant de retomber ?

**Méthode** : comme on cherche la hauteur « maximale », on néglige les frottements si bien que l'énergie mécanique du projectile se conserve. Il suffit d'écrire l'égalité de l'énergie mécanique aux deux points particuliers qui nous intéressent :




$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{=} \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ max}}{=} 0 + mgh_{max} \quad \text{d'où} \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

(★) **R5.7** - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou par conservation de l'énergie mécanique (méthode au choix de l'étudiant).

Ne pas confondre pendule pesant (solide de moment d'inertie  $J$  dont le centre de masse se trouve à une distance  $d$  de l'axe de rotation) et pendule simple (point matériel attaché à un fil idéal de longueur  $\ell$ ).

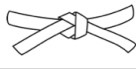





## Pour s'entraîner

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.





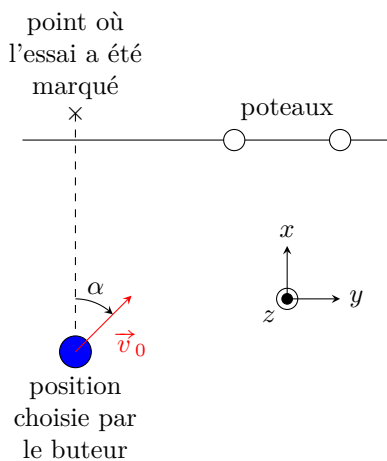
*Flasher ce code pour accéder au corrigé*

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 2 et 4
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2, 3 et 4
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1 et 3 à 6
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 3 à 7

### Exercice 1 : Transformation par vent de côté

 2 | 
  2 | 
 

-  ▷ Chute libre avec frottement ;
-  ▷ PFD.



Dernières minutes du match France-Angleterre du Tournoi des six Nations. La France vient de marquer un essai et se trouve en position de l'emporter face aux Anglais, si son buteur le transforme. Le match a lieu en Angleterre, donc il pleut, et un fort vent latéral balaye le stade de Twickenham.

Sur la figure ci-contre, le terrain est vu du dessus. Au rugby, l'essai est l'action de jeu qui consiste à aplatir le ballon dans la zone d'en-but de l'adversaire, ce qui rapporte 5 points. L'équipe peut ensuite transformer l'essai, ce qui rapporte 2 points supplémentaires. Il s'agit d'envoyer par un coup de pied le ballon entre les poteaux et au dessus de la barre transversale. Les deux poteaux sont séparés de  $d = 5,6$  m et la barre transversale est haute de  $h = 3,0$  m. La tentative de transformation est faite depuis un point en arrière de l'endroit où l'essai a été marqué. La ligne entre l'endroit où l'essai a été marqué et le lieu de tentative de transformation est une parallèle à la ligne de touche. La distance entre la ligne d'en-but et l'endroit de la tentative de transformation est choisie par le buteur, elle est celle qu'il estime la plus favorable à la réussite de sa transformation.

On utilise le repérage cartésien défini sur la figure, dont l'origine est choisie au centre des poteaux. Le vent a une vitesse constante  $\vec{V} = V\vec{e}_y$ . On note  $(x_B, y_B, 0)$  les coordonnées du buteur au moment où il tire, propulsant le ballon avec une vitesse initiale  $v_0$ . Cette vitesse forme un angle  $\beta$  avec le plan  $(xOy)$  et sa projection dans ce plan forme un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x$ . Les frottements de l'air sur le ballon sont modélisés par une force de frottement fluide linéaire décrite par un coefficient  $\lambda$ .

1 - Justifier qualitativement que la résultante des forces exercées par l'air (incluant le vent) sur le ballon s'écrit

$$\vec{F} = -\lambda(\vec{v} - \vec{V}).$$

- 2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}$  et la résoudre analytiquement.
- 3 - Déterminer l'évolution des trois coordonnées  $x, y, z$  du ballon au cours du temps.
- 4 - Les expressions précédentes sont représentées en fonction du temps sur la figure 1. Qui gagne le match ?
- 5 - En supposant que la distance de tir n'est pas un problème, justifier sans calcul qu'il existe une position  $x_B$  optimale pour le buteur.

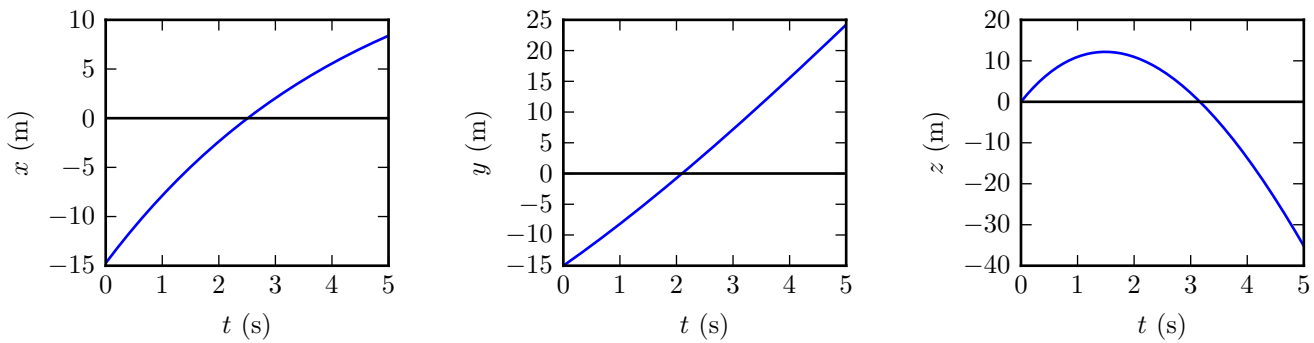


Figure 1 – Tracé numérique des coordonnées du ballon.

## Exercice 2 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone

💡 1 | ✂ 2 | ⊕



- ▷ Force exercée par un ressort ;
- ▷ Oscillateur harmonique.

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux atomes de masses  $m_1$  et  $m_2$ , reliés par un pseudo-ressort de raideur  $k$  et longueur à vide  $L_0$ , libres de se déplacer à une dimension le long d'un axe ( $Ox$ ). La position de l'atome de carbone (resp. oxygène) est repérée par l'abscisse  $x_1$  (resp.  $x_2$ ), avec  $x_2 > x_1 > 0$ .

On suppose les deux atomes initialement immobiles et on note leurs positions  $X_1$  et  $X_2$ . Tout au long de l'exercice, le poids des deux atomes sera négligé.

- 1 - Effectuer un bilan des forces sur l'atome de carbone et établir l'équation différentielle de son mouvement.
- 2 - Faire de même pour l'atome d'oxygène.

Ces deux équations sont couplées : le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre. On introduit deux nouvelles variables,

$$\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \quad \text{et} \quad \delta = x_2 - x_1,$$

et on définit la masse réduite  $\mu$  du système par

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

- 3 - Montrer que  $\sigma$  et  $\delta$  sont solution de deux équations différentielles découplées.
- 4 - Résoudre ces équations compte tenu des conditions initiales, puis en déduire les expressions de  $x_1$  et  $x_2$ .
- 5 - Ces oscillations sont responsables de l'émission d'une onde électromagnétique infrarouge de longueur d'onde  $\lambda = 4,6 \mu\text{m}$ . Déterminer la raideur  $k$  du pseudo-ressort reliant les deux atomes.

Données :

- ▷ Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- ▷ Masses molaires :  $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- ▷ Nombre d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

## Exercice 3 : Anneau sur une tige en rotation

💡 2 | ✂ 2

Une tige  $\mathcal{T}$  horizontale passant par  $O$  tourne autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. Un anneau, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan ( $Oxy$ ).

À l'instant  $t = 0$ , l'anneau est abandonné sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance  $r_0$  de l'origine  $O$ . On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe ( $Ox$ ) :  $\theta(t=0) = 0$ .

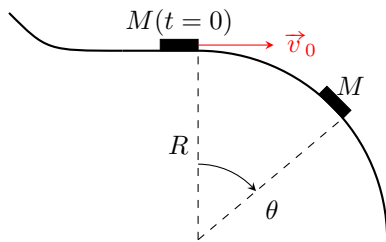
- 1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .
- 2 - Déterminer la loi horaire  $r(t)$  en fonction de  $r_0$  et  $\omega$ . Tracer l'allure de  $r(t)$  pour  $t \geq 0$ .
- 3 - En déduire l'équation de la trajectoire  $r(\theta)$  et la représenter.

**Exercice 4 : Une luge sur une bosse**

💡 2 | ✂ 2 | Ⓢ



- ▷ Énergie mécanique ;
- ▷ Décollage d'un support.



Une luge, modélisée par un point matériel  $M$  de masse  $m$ , arrive sur une bosse à profil circulaire avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_0$ . Tant que la luge suit ce profil, sa trajectoire est circulaire de rayon  $R$  et sa position est repérée par l'angle  $\theta$ . On néglige tout frottement.

**1** - Déterminer la norme de la force de réaction  $\vec{N}$  exercée par la piste sur la luge en fonction de sa position  $\theta$  et de sa vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .

**2** - En déduire l'expression de  $N$  en fonction de  $\theta$  et de la vitesse initiale  $v_0$ . Attention,  $\dot{\theta}$  ne doit plus apparaître dans l'expression finale.

**3** - À quelle condition la luge quitte-t-elle la piste ? Exprimer l'angle de décollage  $\theta_d$ . Glisser prudemment ( $v_0$  petit) empêche-t-il la luge de décoller ?

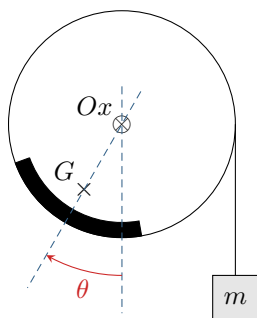
**4** - Justifier que l'expression de  $\theta_d$  obtenue précédemment ne peut plus être juste lorsque la vitesse initiale est trop élevée. Identifier une vitesse limite  $v_{\text{lim}}$ . Que se passe-t-il si  $v > v_{\text{lim}}$  ?

**Exercice 5 : Balourd**

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 3



- ▷ Moment cinétique ;
- ▷ Oscillations autour d'une position d'équilibre.



Un cylindre d'axe  $(Ox)$  et de rayon  $a$  tourne librement. Un dépôt sur la paroi du cylindre forme un balourd de masse  $M$  et centre de masse  $G$ . On pose  $OG = d$ . Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation vaut  $J = Ma^2$ . On néglige la masse propre et l'inertie du cylindre devant celles du balourd. Une masse  $m$  est accrochée à un fil inextensible de masse nulle enroulé autour du cylindre.

**1** - Expliquer qualitativement le mouvement obtenu pour plusieurs valeurs de la masse  $m$ . Identifier une masse critique  $m_c$ .

**2** - Déterminer l'angle d'équilibre  $\theta_e$ .

**3** - Donner la période des petites oscillations du système autour de cet équilibre.

**Indication** : La dernière question est difficile ! Dans un sujet d'écrit, on pourrait reformuler les questions de la manière suivante :

**3** - Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .

**4** - On pose  $\varepsilon = \theta - \theta_e$  l'écart par rapport à la position d'équilibre. En supposant  $\varepsilon \ll 1$ , en déduire l'équation différentielle linéarisée vérifiée par  $\varepsilon$ , puis donner la période des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre.

**Exercice 6 : Chariot à niveau constant**

💡 3 | ✂ 1



- ▷ Problème ouvert.

De nombreuses structures de restauration collective utilisent des chariots à niveau constant pour la distribution des plateaux, assiettes, verres, etc. Les plateaux sont posés sur un support plan maintenu par des ressorts de telle sorte que le haut de la pile soit toujours à la même hauteur, quel que soit le nombre de plateaux empilés, voir figure 2.

**Question** : Déterminer toutes les caractéristiques utiles de la machine. Des valeurs numériques vraisemblables sont attendues.

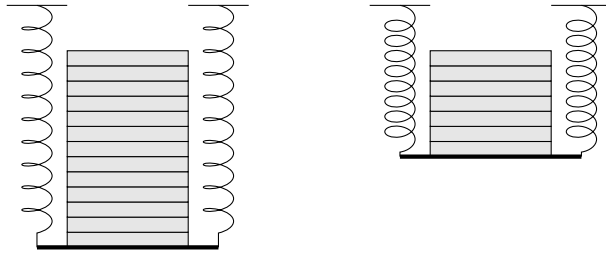


Figure 2 – Chariot à niveau constant d'un distributeur de plateaux.

### Exercice 7 : Posé sur un plateau ?

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Théorème de la résultante cinétique ;
- ▷ Forces de contact ;
- ▷ Problème ouvert.

Un problème ouvert demande de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et à l'inverse toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !



À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical est suspendu un plateau sur lequel est placé un cube. Le plateau est lâché sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude  $A$  par rapport à sa position d'équilibre.

**Question :** Le cube décolle-t-il du plateau ?

*Remarque :* une des principales difficultés de l'exercice est d'établir les équations **rigoureusement**.