



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Révisions R5

Forces centrales

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.



Cartes mémo, réalisées par C. Cayssiols.



Vidéos, réalisées par JJ. Fleck.

Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adaptées à des révisions.



QCM d'applications.

Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

Rappels de cours

A - Caractéristiques générales des mouvements dans un champ newtonien

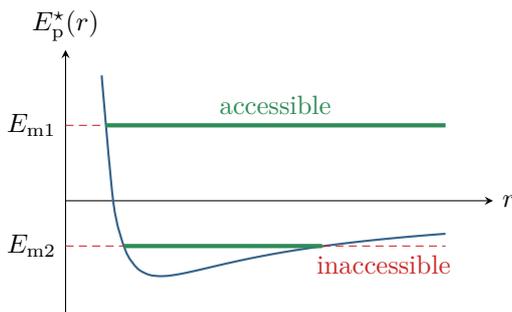
Considérons le cas d'une force centrale dont la norme décroît en $1/r^2$ (on parle de champ newtonien), principalement la force de gravitation exercée par un astre central de masse m_0 (p.ex. le Soleil) sur un autre astre de masse m qui orbite autour de lui (p.ex. la Terre),

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r.$$

- **Conservation du moment cinétique** : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge F_r \vec{e}_r = \vec{0}$ donc $\vec{L}_O = cte$.
 - ▷ *Conséquence 1* : le mouvement est plan car $\vec{OM} \perp \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$ à cause du produit vectoriel ;
 - ▷ *Conséquence 2* : loi des aires
 - constante des aires : $C = r^2 \dot{\theta} = cte$ car $\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$;
 - l'aire balayée par le rayon vecteur \vec{OM} pendant une durée Δt est proportionnelle à Δt , mais ne dépend ni de r ni de la masse m de la planète (ou satellite, ou etc.) en mouvement.
- **Énergie potentielle effective** :
 - ▷ C'est une astuce pour utiliser ce qu'on sait sur les mouvement conservatifs à une dimension alors que le mouvement est à deux dimensions.
 - ▷ Idée : utiliser la constante des aires pour remplacer $\dot{\theta}$ dans l'énergie cinétique par C/r^2 , et interpréter le terme correspondant comme une énergie potentielle effective.

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}_{=E_c} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}_{=E_p^*(r)} + E_p(r).$$

- **Positions accessibles à la particule** : en fonction de l'énergie mécanique initialement donnée à la particule.
 - ▷ Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$, tous les r tels que $E_p^*(r) < E_m$ sont accessibles.
 - ▷ Sur une courbe d'énergie potentielle effective :



- Une particule qui peut partir à l'infini ($E_m \geq 0$) est dite dans un état de diffusion ;
- Si le domaine accessible est borné ($E_m < 0$), elle est dite dans un état lié.

- **Géométrie des trajectoires** : ce sont toujours des coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).
 - ▷ Toutes les trajectoires liées sont circulaires ou elliptiques.
 - ▷ Point le plus proche du centre de force : périégée/périhélie ; point le plus éloignée : apogée/aphélie.

B - Système solaire et satellites

- **Lois de Kepler** :
 - ▷ *Loi des orbites* : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers ;
 - ▷ *Loi des aires* : les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales, et identiques pour toutes les planètes ;
 - ▷ *Loi des périodes* : $T^2/a^3 = \text{cte}$ indépendante de la planète, avec T la période de révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse.
- **Une orbite circulaire est parcourue à vitesse constante** : $E_m = \text{cte}$ et $E_p = \text{cte}$ car $r = \text{cte}$ donc $E_c = \text{cte}$.
- **Vitesse en orbite circulaire** : TRC appliqué à la planète en mouvement circulaire uniforme.

$$m\vec{a} = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_0m}{R^2}\vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{R}}}$$

↪ Comme le mouvement est uniforme, la période vaut $T = 2\pi r/v$, puis on retrouve la troisième loi de Kepler, qui se généralise aux ellipses en remplaçant R par a :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0\mathcal{G}}}$$

Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

- (★) **R6.1** - Dans le cas d'un champ central quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).
- (★) **R6.2** - En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.
- R6.3** - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.
- R6.4** - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

Pour s'entraîner

Exercice 1 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène



- ▷ Caractéristiques d'une orbite circulaire ;
- ▷ Énergie mécanique.

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m , charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données :

- ▷ constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- ▷ vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ▷ permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- ▷ charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- ▷ masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- ▷ $1,0 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

Calculer numériquement E_0 .

7 - La condition de quantification peut également s'interpréter en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires ?

Exercice 2 : Gravity

exemple officiel CCINP | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Loi de Kepler ;
- ▷ Orbite circulaire et elliptique ;
- ▷ Conservation de l'énergie mécanique.



Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400$ km ; \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation.

- 1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0 , sur l'astronaute et son équipement, de masse m . Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
- 2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de \mathcal{G} , m , M_0 et r , rayon de l'orbite.
- 3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97$ min. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H , puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périégée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

- 4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.
- 5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de \mathcal{G} , M_0 , m , r_H et r_S .
- 6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H , T_H et r_S . Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périégée en fonction de r_S , T_S et r_H . Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?
- 7 - Quelle est la durée de ce voyage ?