BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Fiche de révisions R7 *Correction*

# Particules chargées

## Exercice 1 : Spectrométrie de masse 2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrostatique ;*
- *Mouvement cyclotron.*

### A - Accélération des ions

**1** L'ion mercure $Hg^{2+}$ est un cation, chargé positivement. Son énergie potentielle électrostatique $2eV(x)$ est minimale lorsque le potentiel est minimal. Pour que l'ion soit accéléré, il faut donc que **la plaque $P_2$ soit portée à un potentiel inférieur à la plaque $P_1$**.

**2** L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{\text{pe}} = 2eV$ où $V$ est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques $P_1$ et $P_2$

$$\frac{1}{2} m\, v(P_1)^2 + 2e\, V(P_1) = \frac{1}{2} m\, v(P_2)^2 + 2e\, V(P_2)$$

$$0 + 2e\, V(P_1) = \frac{1}{2} m\, v^2 + 2e\, V(P_2)$$

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = 2e\, [V(P_1) - V(P_2)]$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4eU}{m}}}$$

**3** Les deux isotopes ne comptent que deux neutrons de différence, sur un total de 200 : **leur masse diffère donc de à peine 1 %**, et comme de plus elle apparaît sous une racine dans l'expression de $v$ il n'est pas surprenant que l'écart entre les deux vitesses soit très faible.

### B - Filtrage en vitesse

**4** L'ion ne peut avoir un mouvement rectiligne entre les fentes $F_2$ et $F_3$ que si la **résultante des forces qu'il subit est dirigée selon $\vec{e}_x$.**

> *Attention à ne pas confondre mouvement rectiligne « tout court » et mouvement rectiligne uniforme. Rien n'impose ici a priori que la résultante des forces subies par l'ion soit nulle.*

**5** L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz, et son poids est négligeable. Cette force s'écrit

$$\vec{F}_{\text{L}} = 2e\left[\vec{E}_2 + \vec{v} \wedge \vec{B}_2\right] = 2e\,[E_2\,\vec{e}_y + vB_2(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)] = 2e(E_2 - vB_2)\vec{e}_y\,.$$

Comme cette force ne peut pas être dirigée selon $\vec{e}_x$, on en déduit que l'ion n'a une trajectoire rectiligne que si elle est nulle, c'est-à-dire

$$E_2 - vB_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = v_0 = \frac{E_2}{B_2}\,.}$$

**6** En comparant avec les valeurs données question **??**, ce sont les ions les plus lents qui traversent le filtre. D'après la question **??**, ce sont les plus lourds : ce sont donc **les ions de l'isotope 202** qui passent au travers du filtre.

 

## C - Séparation des ions

**7** Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\overrightarrow{F_B} = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\mathrm{c} = \text{cte} \qquad \text{et} \qquad v = \text{cte} = v_0\,.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

**8** Comme la trajectoire est circulaire, on la décrit en coordonnées cylindriques de centre le centre de la trajectoire et d'axe $z$. D'après le PFD appliqué à l'ion modélisé comme un point matériel,

$$m\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{L} \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{{v_0}^2}{R}\vec{e}_r = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}_3$$

en utilisant l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme. Compte tenu de la géométrie du dispositif, on devine que l'ion tourne en sens trigonométrique, sinon il n'atteindrait jamais les collecteurs : on a donc $\vec{v} = +v_0\,\vec{e}_\theta$ car le mouvement est uniforme. On peut le vérifier à partir du sens du champ magnétique $\vec{B}_3 = -B_3\,\vec{e}_z$. Cela permet d'exprimer le produit vectoriel,

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = -v_0 B_3(\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -v_0 B_3\,\vec{e}_r\,.$$

On déduit du PFD projeté sur $\vec{e}_r$

$$m\frac{{v_0}^2}{R} = 2ev_0B_3 \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{mv_0}{2eB_3}\,.$$

En remplaçant $v_0$ par son expression déterminée à la question 2,

$$R = \sqrt{\frac{m^2}{4e^2{B_3}^2} \times \frac{4eU}{m}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \sqrt{\frac{mU}{e{B_3}^2}}\,.}$$

**9** Le rayon est d'autant plus grand que l'ion est massif : on a donc $y_{200} < y_{202}$, d'où on déduit

$$\boxed{y_{200} = 2R_{200} = 143{,}6\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad y_{202} = 2R_{202} = 145{,}0\,\mathrm{cm}\,.}$$

**10** La charge totale est proportionnelle au nombre d'ions reçus, puisque chaque ion est chargé $+2e$. On en déduit alors les proportions isotopiques $\alpha_{200}$ et $\alpha_{202}$,

$$\boxed{\alpha_{200} = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2} = 77\,\% \qquad \text{et} \qquad \alpha_{202} = \frac{N_2}{Q_1+Q_2} = 23\,\%\,.}$$

## Exercice 2 : Cyclotron — inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT | 2 | 2

▷ *Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.*

- ▷ Système : un proton, assimilé à un point matériel de masse $m$ et charge $q$.
- ▷ Référentiel : lié au cyclotron, donc a priori le référentiel terrestre, en bonne approximation galiléen.
- ▷ Bilan des forces : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

**1** À l'intérieur des dees seule la force magnétique $\vec{F}_B = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\,.}$$

**2** La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage polaire, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\vec{a} = e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique d'un tel mouvement,

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_r\right) = e\,v\,B(-\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -e\,v\,B\,\vec{e}_r$$

en utilisant $\vec{v} = -v\,\vec{e}_\theta$ : la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton, résultat que vous pouvez ou bien connaître ou bien retrouver ici à partir de la cohérence des signes. Finalement,

$$\frac{m\,v^2}{R} = e\,v\,B \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \frac{mv}{eB}\,.}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur $\pi R$, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{d} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22\,\mathrm{ns}\,.}$$

On remarque que $\Delta t_\mathrm{d}$ ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee (et évidemment de caractéristiques intrinsèques du proton, $e$ et $m$).

**3** Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de $D_2$ à $D_1$ et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de $D_1$ à $D_2$. En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à $\Delta t_\mathrm{d}$, soit pour la période

$$T = 2\Delta t_\mathrm{d} = \frac{2\pi m}{eB} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23\,\mathrm{MHz}\,.}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

**4** Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les dees, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un dee et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à $U_\mathrm{m}$. Sous ces hypothèses, on trouve

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}m{v_n}^2 = W(\vec{F}_E) = e\frac{U_\mathrm{m}}{a}a$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \simeq \frac{1}{2}m{v_n}^2 = neU_\mathrm{m} \qquad \text{soit} \qquad v_n = \sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_\mathrm{m}}{B^2 e}}}$$

**5** Remarquons bien que $n$ compte le nombre de passage dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de $n$ à $n+2$. Après un tour, $n = 2$ et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{et} \qquad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_\mathrm{m}}{eB^2}} = 6{,}1\,\mathrm{cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}\,R_2 = 19\,\mathrm{cm}}$$

**6** Avec $R_\mathrm{N} = 35\,\mathrm{cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_\mathrm{fin} = \frac{eBR_N}{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{c,fin} = \frac{e^2B^2R_N^{\,2}}{2m} = 2{,}1\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 14\,\mathrm{MeV}}$$

puis

$$E_{\mathrm{c,fin}} = N e U_{\mathrm{m}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = \frac{E_{\mathrm{c,fin}}}{e U_{\mathrm{m}}} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.