LP29 Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.

Correcteurs : Baptiste Percier [1] et Etienne Thibierge [2]

Leçon présentée le jeudi 13 décembre 2012

Extraits des rapports du jury

Je vous rappelle que le préambule des rapports de l'épreuve de leçon présente les attentes et exigences du jury. Je vous encourage vivement à le lire.

2012 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

2009 et 2010 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.

2007 et 2008 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

2001 : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.

2000 : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin.

1998 : Un *battement* n'est pas un *paquet d'ondes*. Le choix d'une représentation de Fourier *spatiale* ou *temporelle* pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la *vitesse de propagation de l'énergie.*

Commentaires généraux

La présentation a pêché par absence de rigueur. Les égalités vecteur = scalaire, les équations fausses, les notations non définies ou maladroites ont été beaucoup trop nombreuses et seront sévèrement sanctionnées par le jury, cf. les préambules de rapport. De même, il faut éviter les expressions malheureuses comme « électrons à charges multiples ».

Le rythme adopté est trop lent, et tout le contenu de la leçon n'a pas été traité dans le temps imparti. Rappelons que vous serez coupés sèchement si vous dépassez du temps réglementaire de 50 minutes. Ainsi la vitesse de groupe n'a été introduite qu'au bout de 47 minutes, c'est beaucoup trop tard. Les deux points précédents ne sont pas disjoints : plus de rigueur permettrait une formulation plus directe et plus précise, et le gain en efficacité serait important.

Il en reste finalement une impression de flou, d'une leçon pas toujours bien articulée, où les définitions et notions importantes n'ont pas été assez bien présentées ni mises en avant. On ne peut pas se contenter de définir des notions clés par une formule mathématique à l'oral. Il faut écrire ces définitions au tableau, et les interpréter physiquement.

Cependant le contenu de la leçon est pertinent et bien ciblé. Les exemples retenus sont tout à fait pertinents, et les illustrations expérimentales convaincantes.

En ce qui concerne la physique, un point essentiel semble avoir été mal compris : l'analyse de Fourier, et en corolaire la représentation complexe. Rappelons quelques points à ce sujet :

- ▷ Un signal *périodique* possède une décomposition en *séries* de Fourier, alors qu'un signal quelconque possède une transformée de Fourier. Une série de Fourier est une somme discrète de termes sinusoïdaux, alors qu'une transformée de Fourier est une intégrale.
- ▷ « Passer en représentation complexe » signifie qu'on étudie la réponse du système à une seule composante du développement de Fourier. Cela permet de transformer une équation différentielle en équation algébrique, ce qui simplifie beaucoup les calculs.
- ▷ Pour que ça ait un sens, il faut que la réponse du système à la somme des composantes soit la somme des réponses à chaque composante. Formulé mathématiquement, il faut que l'équation différentielle qui régit l'évolution du système soit **linéaire**. C'est une condition essentielle, à signaler et commenter à chaque fois que vous utilisez la représentation complexe.

Ces notions sont fondamentales, ce serait prendre des risques que d'aller passer les épreuves sans être au clair dessus.

1. baptiste.percier@ens-lyon.fr
2. etienne.thibierge@ens-lyon.fr, http://perso.ens-lyon.fr/etienne.thibierge

Retour sur la leçon présentée

I) Propagation dans un milieu : le plasma

A) Rappel : OEM dans le vide

Tout ce qui est dit dans ce paragraphe est intéressant, mais le réunir ainsi et à ce stade de la leçon est un peu maladroit.

Partir des équations de Maxwell 3d et dire « après calculs, on aboutit à » l'équation d'onde 1d est malhabile. Dire « on a déjà vu la relation de dispersion, c'est ω/k » est inapproprié, surtout ici : la relation de dispersion a une définition beaucoup plus large ... et ω/k est la vitesse de phase. La relation de dispersion du vide sera par contre intéressante à rappeler dans la suite pour comparer au cas du plasma.

L'expérience de dispersion par le prisme est une bonne façon d'introduire le sujet, et à ce titre mériterait d'être déplacée en introduction. En revanche, ce n'est pas très cohérent de la placer dans un paragraphe intitulé « propagation dans le vide », lui même inséré dans la partie « propagation dans un plasma ». Comme k et λ sont reliés de façon univoque, il faut éviter d'écrire des choses comme $\omega/k = f(\lambda)$.

L'introduction seulement mathématique de la vitesse de phase n'est pas intéressante : lorsque vous décidez de l'introduire, il faut impérativement donner aussitôt sa signification physique.

B) Mise en équation

Rappelons qu'on ne « fait » pas le PFD, mais qu'il s'applique à un système dans un référentiel qu'il faut préciser.

Une façon alternative de dire qu'il y a séparation des échelles de temps entre le déplacement des ions et celui des électrons est de dire que le plasma est à une unique température, et donc les énergies cinétiques sont du même ordre de grandeur.

Il y a eu un mélange entre une description eulérienne et lagrangienne d'un plasma, qui aboutit à parachuter les dérivées partielles et à des explications peu convaincantes sur le champ $\overrightarrow{E}$ à considérer. Le Dunod PC-PC* traite des deux méthodes, ch. 16. Ma préférence va vraiment à l'approche eulérienne, mais l'approche lagrangienne est aussi parfaitement défendable. En revanche une fois le cadre choisi il faut s'y maintenir.

Une fois établie l'équation de Klein-Gordon, Gauthier s'est attaché à commenter la présence d'un terme supplémentaire par rapport à l'équation de d'Alembert. C'est un point important, et c'est très bien de le souligner.

La méthode de recherche de la relation de dispersion est la bonne. En revanche, l'introduction de la phase φ est superflue. Il faut bien insister sur la définition de la relation de dispersion : de façon générale, c'est la relation entre ω et $\overrightarrow{k}$. Cela peut être une relation implicite, ou par exemple entre ω^2 et k^2.

Le cas $\omega < \omega_p$ conduit bien à une onde évanescente, mais attention à ne pas galvauder cette notion : c'est une onde plane inhomogène, où l'atténuation se fait dans une direction qui n'est pas la direction de propagation. De l'absorption ne peut donc pas donner lieu à une onde évanescente.

Les ordres de grandeur donnés sur l'ionosphère sont très appréciables. Pour mémoire, c'est la couche externe de l'atmosphère, située pour la Terre à une altitude supérieure à 60 km. Les densités de charges varient de 10^{10} à 10^{12} m^{-3} au cours de la journée en raison de processus d'ionisation induits par le rayonnement UV le jour, et de recombinaison électron-ion la nuit.

C) Analogie avec les pendules couplés

Le transparent qui a été présenté était beaucoup trop chargé, alors que toutes les notations n'étaient pas définies. Comme il s'agit d'un deuxième exemple, je pense que vous pouvez vous permettre de ne pas démontrer l'équation de propagation ni la relation de dispersion.

L'expérience sur la chaîne de pendules couplés est très intéressante. C'est une très belle illustration de la notion de pulsation de coupure.

Cependant, au vu du manque de temps, il aurait sans doute été plus judicieux de présenter la chaîne de pendules en troisième partie, pour avoir le temps de traiter convenablement de la notion de vitesse de groupe qui est beaucoup plus importante.

D) Allure de la dispersion

Il est intéressant de montrer que l'on peut avoir $v_\varphi > c$, ce qui fait une transition naturelle vers la notion de paquet d'ondes. Attention cependant à ne pas en tirer des conclusions trop virulentes : la vitesse de phase est plus qu'un « artifice mathématique » !

II) Paquets d'ondes

Cette partie a été abordée au bout de 36 minutes, c'est bien trop tard.

A) Définition physique et mathématique

Comme précisé auparavant, les aspects Fourier doivent être retravaillés pour en donner des énoncés sans erreur. Attention à la rigueur des notations et des dénominations : tel que défini, $\alpha(\omega)$ est le spectre de la fonction ψ et pas sa densité spectrale, qui est une grandeur énergétique, et qui serait $|\alpha(\omega)|^2$.

Lorsque vous écrivez l'expression d'un paquet d'onde, attention à être cohérent. La relation de dispersion impose $k = k(\omega)$ et il faut le faire ressortir, cf. rapport 2001. Si $\Delta\omega$ est la largeur à mi-hauteur du spectre, les bornes de l'intégrale ne peuvent pas être $\omega_0 \pm \Delta\omega$.

Attention, la définition donnée dans le poly est fausse : un paquet d'onde n'est pas une évolution.

B) Vitesse de groupe

Il est faux de dire que la vitesse de groupe n'est définie que pour une relation de dispersion linéaire. C'est un cas particulier, qui est loin d'être le plus fréquent. En revanche il faut bien la faire apparaître comme étant le premier ordre du DL de la relation de dispersion. La notation $\partial\omega$ pour le paramètre infinitésimal est à bannir : il faut utiliser par exemple $\mathrm{d}\omega$ ou $\delta\omega$.

Il est intéressant de montrer que la vitesse de groupe est en général la vitesse de propagation de l'énergie, et de montrer une animation illustrant la différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe. Le temps a manqué pour traiter ces aspects correctement.

Conclusion

La conclusion doit résumer les idées essentielles qui ont été dégagées dans la leçon, ce qui a été fait correctement. L'ouverture sur l'étude de la structure de la Terre par celle de la dispersion des ondes sismiques est intéressante et bien choisie.

Questions

Les questions servent *d'abord* à éclaircir les points peu clairs de la leçon, puis *ensuite* à tester vos connaissances plus largement. Voici des pistes de questions d'ouverture envisageables, qu'on n'a pas toutes posées pendant la correction.

Les vitesses de phase et de groupe ont toutes les deux une réalité physique, et peuvent se mesurer. Mesurer un indice optique revient à mesurer une vitesse de phase, alors que la mesure du temps de vol d'une impulsion dans un câble coaxial donne une mesure de la vitesse de groupe.

La dispersion peut être compensée par des non linéarités. C'est ainsi que naissent des solitons, qui se propagent sans déformation. Pour que la compensation soit efficace, les solitons doivent avoir une forme bien choisie. Cependant, pour que la notion de relation de dispersion ait encore un sens il faut que ces non-linéarités restent faibles. Si les linéarités sont trop fortes, l'approche en Fourier n'a plus de sens, et il peut même ne plus exister de relation de dispersion.

L'absorption est une cause incontournable de dispersion. Dans ce cas, $k = k' + \mathrm{i}k''$ est complexe et les vitesses de phase et de groupe sont définies par rapport à k'. Absorption et dispersion sont reliées par les relations de Kramers-Krönig, qui stipulent que l'un ne va pas sans l'autre. La seule exception que je connaisse est la dispersion intermodale dans un guide d'onde, qui peut se faire sans absorption. La subtilité vient du fait que c'est une dispersion *effective*, qui ne concerne que k_z et pas $\left|\overrightarrow{k}\right|$, cf. corrigé LP sur la propagation guidée. Attention cependant, absorption et atténuation ne sont pas synonymes : penser par exemple à l'onde évanescente.

La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie. Il faut que le milieu soit suffisamment peu dispersif. Si le milieu est très dispersif, il est en pratique très absorbant, et le signal est alors très déformé. Par exemple aux résonances d'un milieu diélectrique on a v_φ et $v_g > c$, cf. Portelli thème 21.

Si on développe la relation de dispersion à l'ordre suivant, on obtient de la déformation du paquet d'onde. Cet aspect est détaillé par Portelli.

Des questions sur la propagation guidée pourraient aussi être posées, nous vous laissons vous reporter au corrigé de la LP dédiée.

Quels choix pour la leçon ?

Pour respecter les contraintes des rapports du jury et s'assurer un temps suffisant pour traiter les aspects importants, je pense que vous n'avez pas énormément de liberté sur le plan. En revanche, vous avez beaucoup de choix dans les exemples à traiter.

Je pense que la première partie doit être consacrée à établir de A à Z une équation de propagation dispersive sur un exemple. Le plasma est un exemple intéressant. Une alternative est le câble coaxial dissipatif dans le modèle des constantes réparties, qui est aussi traité dans le Dunod. Le câble coaxial peut être illustré expérimentalement, en montrant la déformation d'une impulsion. En revanche je déconseille la chaîne de pendules, où la linéarisation du sinus et le passage à la limite continue compliquent inutilement les choses.

La deuxième partie devrait être consacrée à la notion de paquet d'onde, à construire à partir de l'insuffisance des (sommes discrètes d') ondes monochromatiques pour décrire des signaux finis. Les notions de vitesses de phase et de groupe doivent être définies à ce stade. Il est alors important de préciser que l'on peut mesurer l'une et l'autre, et de donner des exemples de telles mesures. Le lien avec la propagation de l'énergie doit être mentionné. Il peut être intéressant aussi de parler rapidement de la déformation du paquet d'onde.

Il restera ensuite à étudier un ou deux autre(s) exemple(s), où vous pouvez vous contenter de donner sans démonstration l'équation de propagation et la relation de dispersion, pour analyser en détails les conséquences de la dispersion. Là encore le choix est vaste : plasma et câble coaxial bien sûr, mais aussi ondes gravito-capillaires ou chaîne de pendules couplés où l'expérience est très intéressante.

Passer environ quinze minutes sur chaque partie semble un bon compromis.

Conclusion

La leçon doit être reprise dans le but d'être plus rigoureux et plus efficace dans les explications. Le contenu peut être gardé, avec un peu de réorganisation.

Si vous avez d'autres questions, nous restons à votre disposition par mail, en TP ou dans de futures séances de correction.