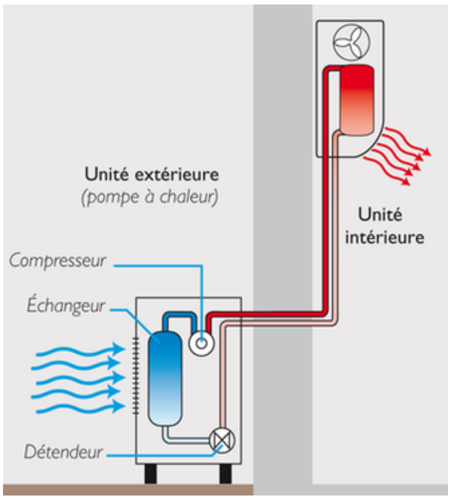
Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Thermodynamique différentielle

Chauffage par une pompe à chaleur



Une pompe à chaleur (abrégée PAC) est une machine thermique permettant d'effectuer un transfert thermique effectif de sens opposé au sens naturel, c'est-à-dire « du froid vers le chaud ». Dans une PAC, un fluide caloporteur est en écoulement dans un circuit passant alternativement à l'extérieur et à l'intérieur de la maison à chauffer. Rappelons que dans ce contexte l'extérieur de la maison est qualifié de « source froide » et l'intérieur de « source chaude ». À l'extérieur de la maison, le fluide reçoit une puissance thermique $\mathcal{P}_\mathrm{f} > 0$ ainsi qu'une puissance mécanique $\mathcal{P}_\mathrm{m} > 0$ au sein du compresseur, et à l'intérieur il reçoit une puissance thermique algébrique $\mathcal{P}_\mathrm{c} < 0$, ce qui revient à dire que le fluide restitue un transfert thermique à l'intérieur de la maison.

Cet exercice s'intéresse à l'évolution de la température intérieure T_c lorsque la PAC est mise en marche alors que la température extérieure T_f est constante.

Hypothèses de travail :

- Puissance du compresseur $\mathcal{P}_\mathrm{m} = \mathrm{cte}$;
- Le démarrage de la PAC est de durée négligeable : celle-ci est toujours supposée en régime permanent ;
- Les pertes thermiques au travers des murs de la maison sont également négligées ;
- Toutes les évolutions thermodynamiques de la PAC sont considérées réversibles.

1 - Par application des principes de la thermodynamique au fluide caloporteur de la PAC pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, établir deux relations entre les puissances échangées et les températures des sources.

2 - Établir une relation supplémentaire en appliquant le premier principe à l'intérieur de la maison, de capacité thermique totale C, incluant l'air, les murs, le mobilier, etc.

3 - En déduire que la température T_c de la source chaude vérifie la relation

$$\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right) \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C} \, .$$

4 - En déduire la durée de chauffage τ nécessaire pour que la température intérieure s'élève de T_0 à $T_0 + \Delta T$.

Éléments de correction

Une difficulté importante de l'exercice vient du fait qu'il faut raisonner alternativement sur deux systèmes différents : le fluide caloporteur et l'air intérieur de la maison. Dans un tel cas, pour bien poser les notations et éviter des erreurs de signes, rien ne vaut un beau diagramme des échanges, voir figure 1, qui a toute sa place sur une copie ou sur un tableau en colle et à l'oral.

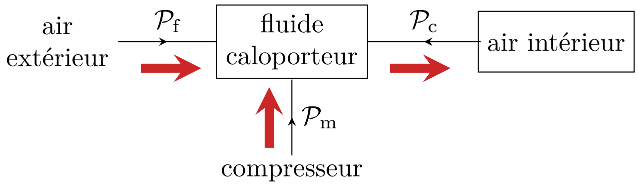


Figure 1 – Diagramme des échanges de la PAC. Les flèches noires indiquent l'orientation conventionelle des échanges énergétiques, les flèches rouges leur sens réel.

1 Comme la PAC fonctionne en régime permanent, alors l'énergie totale du fluide caloporteur est constante. Le bilan d'énergie interne du fluide caloporteur s'écrit donc

$$\mathrm{d}U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_\mathrm{f}\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{c} + \mathcal{P}_\mathrm{m} = 0\,.} \tag{1}$$

Par ailleurs, comme le fluide évolue de manière réversible, il n'y a pas de création d'entropie. Le bilan d'entropie s'écrit donc

$$\mathrm{d}S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t}{T_\mathrm{c}} + \frac{\mathcal{P}_\mathrm{f}\,\mathrm{d}t}{T_\mathrm{f}} + \cancel{\delta\mathcal{S}_\mathrm{c}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} + \frac{\mathcal{P}_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = 0\,.} \tag{2}$$

2 Au cours d'une évolution inifinitésimale, l'intérieur de la maison cède au fluide caloporteur le transfert thermique infinitésimal $-\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$. Le bilan d'énergie interne de l'intérieur de la maison s'écrit donc

$$\mathrm{d}U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C\,\mathrm{d}T_\mathrm{c}\,, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}}{C}\,.} \tag{3}$$

3 D'après la relation (2),

$$\mathcal{P}_\mathrm{f} = -\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\mathcal{P}_\mathrm{c}\,,$$

donc en injectant dans la relation (1)

$$\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right)\mathcal{P}_\mathrm{c} + \mathcal{P}_\mathrm{m} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{P}_\mathrm{c} = -\frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C\,(1 - T_\mathrm{f}/T_\mathrm{c})}$$

ce qui conduit avec la relation (3) au résultat attendu,

$$\boxed{\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right)\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,.}$$

4 Par séparation des variables,

$$\mathrm{d}T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \mathrm{d}T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}\int_{T_0}^{T_0+\Delta T}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\int_0^\tau \mathrm{d}t$$

ce qui donne en procédant aux intégrations

$$\Delta T - T_\mathrm{f}\ln\frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,\tau$$

et ainsi

$$\boxed{\tau = \frac{C}{\mathcal{P}_\mathrm{m}}\left[\Delta T - T_\mathrm{f}\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)\right]\,.}$$