Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Conduction thermique

Température d'une maison

inspiré oral banque PT

> *Les deux candidats indiquent dans leur retour que l'énoncé comptait de très nombreuses données numériques, ce qui le rend difficile à reproduire fidèlement.*

On s'intéresse à l'isolation d'une maison, modélisée par une unique pièce, délimitée par quatre murs de surface $S = 100\,\mathrm{m}^2$ et un toit de même surface S. La maison est chauffée par un dispositif lui apportant une puissance $\mathcal{P}_0 = 2\,\mathrm{kW}$ en fonctionnement « tout ou rien ».

1 - On considère un matériau de conductivité thermique λ. Par une analogie à préciser, définir la résistance thermique. Établir celle d'une paroi plane faite avec ce matériau. En déduire l'expression de la conductance thermique surfacique de la paroi.

2 - Supposons la maison inhabitée depuis longtemps, initialement à la température extérieure $T_\mathrm{e} = 10\,°\mathrm{C}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température une fois le chauffage allumé. Au bout de combien de temps la température confort $T_\mathrm{c} = 20\,°\mathrm{C}$ est-elle atteinte ?

3 - En plein hiver, $T_\mathrm{e} = 0\,°\mathrm{C}$ le toit de la maison est recouvert d'une couche de neige épaisse de $10\,\mathrm{cm}$, et la température maintenue à T_c. Pendant quelle fraction du temps le chauffage doit-il être actif ?

Données :

- ▷ capacité calorifique totale de la maison : $C = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$;
- ▷ conductance thermique surfacique des murs et fenêtres : $U = 1\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$;
- ▷ conductance thermique surfacique de la toiture : $U' = 0{,}1\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$;
- ▷ conductivité thermique de la neige : $0{,}4\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Éléments de correction

1 • **Définition :** Considérons un système (p.ex. un mur) séparant deux milieux de températures respectives T_1 et T_2 traversé par un flux thermique $\Phi_{1\to2}$. Sa résistance thermique est définie en convention récepteur par

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to2}}\,.$$

La définition est analogue à celle d'une résistance électrique, la température jouant le rôle du potentiel électrique et le flux thermique celui de l'intensité.

• **Cas d'une paroi plane :** Raisonnons sur un mur d'épaisseur e et section S faite dans un matériau de conductivité λ. D'après la loi de Fourier, projetée à une dimension perpendiculaire au mur,

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x\,.$$

Par définition, le flux thermique vaut

$$\Phi_{1\to2} = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S\,.$$

Par séparation des variables,

$$\Phi_{1\to2}\int_0^e \mathrm{d}x = -\lambda S\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T \qquad \text{soit} \qquad \Phi_{1\to2}\,e = -\lambda S(T_2 - T_1)$$

d'où on déduit

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}\,.}$$

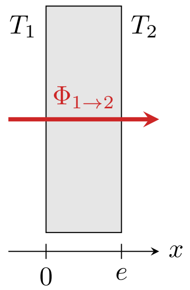

Figure 1 – Calcul de la résistance thermique d'une paroi plane.

• **Conductance thermique surfacique :** la conductance étant l'inverse de la résistance,

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{e} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{U = \frac{G_{\text{th}}}{S} = \frac{\lambda}{e}\,.}$$

Donner les conductances thermiques surfaciques permet d'inclure dans l'étude de façon simple l'isolation des murs, qui ne sont pas faits d'un unique matériau, sans passer par des calculs de résistances thermiques équivalentes.

2 La maison perd de l'énergie au travers des murs et de la toiture, soumises au même écart de température $T - T_{\text{e}}$, et en reçoit de la part du chauffage, qui fonctionne en continu. Un bilan d'enthalpie instantané appliqué à la maison donne

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_0 - \underbrace{US(T - T_{\text{e}})}_{\text{murs}} - \underbrace{U'S(T - T_{\text{e}})}_{\text{toiture}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Joule}}}{=} C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{(U+U')S}{C}T = \frac{(U+U')S}{C}T_{\text{e}} + \frac{\mathcal{P}_0}{C}\,.}$$

> *L'énoncé n'est pas très clair sur ce qu'est la surface S : celle d'un seul mur, ou des quatre réunis ? À moins d'avoir une maison gigantesque ou très haute, le plus probable est qu'il s'agisse de la surface totale des quatre murs ... mais dans un contexte d'oral, peu importe l'interprétation que vous en avez*

> *tant que vous restez cohérent.*

Posons

$$\tau = \frac{C}{(U+U')S} \qquad \text{et} \qquad T_\infty = T_\mathrm{e} + \frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S}\,,$$

on a alors

$$T(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_\infty\,.$$

À l'instant initial,

$$T(t{=}0) \underset{\mathrm{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} T_\mathrm{e} \underset{\mathrm{expr}}{\underset{\uparrow}{=}} A + T_\infty = A + T_\mathrm{e} + \frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S} \qquad \text{soit} \qquad A = -\frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{T(t) = T_\infty - \frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La température de confort T_c sera atteinte à l'instant t_c tel que

$$T_\infty - \frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S}\,\mathrm{e}^{-t_\mathrm{c}/\tau} = T_\mathrm{c} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{e}^{-t_\mathrm{c}/\tau} = \frac{(U+U')S}{\mathcal{P}_0}(T_\infty - T_\mathrm{c})$$

et ainsi

$$\boxed{t_\mathrm{c} = \tau \ln \frac{\mathcal{P}_0}{(U+U')S(T_\infty - T_\mathrm{c})} = 1{,}45 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \simeq 4\,\text{heures.}}$$

3 La neige ajoute une résistance thermique en série avec celle de la toiture. Le schéma équivalent est représenté figure 2. La résistance équivalente totale est telle que

$$G_\text{éq} = \frac{1}{R_\text{éq}} = US + \frac{1}{\dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{U'S}} \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{th} = 1{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.$$

Figure 2 – Schéma équivalent à la maison recouverte de neige.

Notons $\langle\mathcal{P}\rangle$ la puissance moyenne délivrée par le chauffage. Le bilan enthalpique en réigme permanent s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \langle\mathcal{P}\rangle - G_\text{éq}(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{e}) \underset{\mathrm{RP}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \langle P\rangle = G_\text{éq}(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{e}) = 1{,}1\,\mathrm{kW}\,.$$

Comme $\langle P\rangle / \mathcal{P}_0 = 0{,}55$, on en déduit que **le chauffage doit fonctionner pendant 55 % du temps** ... ça laisse un peu de marge au Père Noël pour choisir son moment et descendre dans la cheminée !