BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 12 – Électromagnétisme

# Champ électrostatique
# Théorème de Gauss

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

| Ceinture | | Proposition de parcours d'entraînement |
|---|---|---|
| | Ceinture blanche | Applications + exercices 1 à 5 puis 10 |
| | Ceinture jaune | Applications + exercices 1 à 6 puis 10 |
| | Ceinture rouge | Applications (★) + exercices 1 à 7 puis 10 et 11 |
| | Ceinture noire | Applications (★) + exercices 1 puis 4 à 11 |

*Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé*

## Applications de cours

*Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les applications marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !*

**Attention !** Sur toutes les questions relatives au théorème de Gauss, la rigueur de la démarche est un point essentiel qui doit **très clairement** apparaître.

**(★) 12.1 -** Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss puis démontrer le théorème de Gauss.

**12.2 -** Identifier les analogies formelles entre force de gravitation et force de Coulomb et en déduire le théorème de Gauss gravitationnel. Déterminer le champ de gravitation créé par une planète sphérique de masse volumique uniforme.

> *Le calcul du champ de gravitation n'est pas directement traité en cours, mais fait en TD.*

**12.3 -** Déterminer le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume.

**12.4 -** Déterminer le champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume.

**12.5 -** Déterminer le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

# Se muscler avec Gauss

## Exercice 1 : Champ créé par une distribution cylindrique non-uniforme — 1 | 2 |

▷ *Charge volumique non uniforme ;*
▷ *Coordonnées cylindriques.*

Considérons un cylindre de grande hauteur $L$ chargé en volume avec la densité

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,.$$

Déterminer $\lambda$ en fonction de la charge totale $Q$ du cylindre, puis calculer le champ électrostatique qu'il crée en tout point de l'espace en supposant les effets de bord négligeables.

✎ ***Correction*** — • ***Charge totale :*** *La charge totale s'obtient par intégration sur le volume,*

$$\begin{aligned} Q &= \iiint \rho(M)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \iiint \frac{\lambda}{\cancel{r}}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,\cancel{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r/a}\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z \\ &= \lambda \times \left[-a\,\mathrm{e}^{-r/a}\right]_0^{+\infty} \times 2\pi \times L \\ &= +2\pi a \lambda L \end{aligned}$$

*d'où on déduit*

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{2\pi a L}\,.}$$

***Question d'analyse 1*** *- Retrouver l'expression de $\mathrm{d}\tau$.*

***Question d'analyse 2*** *- Justifier les bornes de chaque intégrale.*

***Question d'analyse 3*** *- Rappeler comment vérifier la position du facteur $a$ dans la primitive de l'exponentielle.*

• ***Symétries et invariances :*** *les plans $\Pi_{s1} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $\Pi_{s2} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont plans de symétrie de la distribution de charge, d'où on déduit*

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\,\vec{e}_r\,.$$

***Question d'analyse 4*** *- Faire deux schémas du cylindre vu de côté et du dessus, et faire apparaître le point $M$ et les deux plans $\Pi_{s1}$ et $\Pi_{s2}$.*

***Question d'analyse 5*** *- Comment expliquer que $\Pi_{s2}$ puisse être considéré comme un plan de symétrie ?*

*De plus, la distribution est invariante par toute translation de vecteur directeur $\vec{e}_z$ et par toute rotation autour de l'axe $(Oz)$, si bien que $E_r$ ne dépend ni de $z$ ni de $\theta$, et ainsi*

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r\,.$$

• ***Surface de Gauss :*** *cylindre de rayon $r$ et de hauteur $H$, fermé par deux faces planes.*

***Question d'analyse 6*** *- Dessiner la surface de Gauss sur le schéma précédent.*

• ***Calcul du flux :***

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint_{SG} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} &= \iint_{\text{lat}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{lat}} + \iint_{\text{haut}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{haut}} + \iint_{\text{bas}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{bas}} \\ &= E_r(r) \iint_{\text{lat}} \mathrm{d}S_{\text{lat}} \\ &= E_r(r) \times 2\pi r H \end{aligned}$$

***Question d'analyse 7*** *- Expliciter la direction de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ pour chaque intégrale.*

***Question d'analyse 8*** *- Pourquoi $E_r(r)$ peut-il sortir de l'intégrale ?*

• ***Charge intérieure :***

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \iiint_{SG} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \iiint \frac{\lambda}{\cancel{r}}\,\mathrm{e}^{-r/a}\,\cancel{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \lambda \int_0^{r} \mathrm{e}^{-r/a}\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{H} \mathrm{d}z \\ &= \lambda \times \left[-a\,\mathrm{e}^{-r/a}\right]_0^{r} \times 2\pi \times H \\ &= +2\pi\lambda a(1-\mathrm{e}^{-r/a})H \end{aligned}$$

*Question d'analyse 9 - Pourquoi ne procède-t-on pas par disjonction de cas ?*

*Question d'analyse 10 - Pourquoi n'a-t-on pas simplement $Q_{int} = \frac{\lambda}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a} \times \pi r^2 H$ ?*

*Question d'analyse 11 - Justifier les bornes de chaque intégrale.*

- ***Conclusion :*** *d'après le théorème de Gauss,*

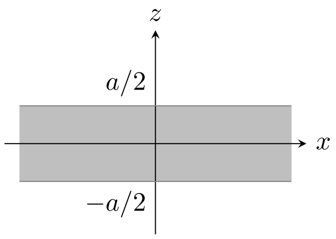
$$2\pi r H\, E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi a(1-\mathrm{e}^{-r/a})\lambda H \qquad \text{soit} \qquad r E_r(r) = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0}(1-\mathrm{e}^{-r/a})$$

*et ainsi*

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r}(1-\mathrm{e}^{-r/a})\,\vec{e}_r\,.}$$

## Exercice 2 : Champ électrostatique créé par une couche épaisse — 1 | 2

- ▷ *Charge volumique uniforme ;*
- ▷ *Modélisation surfacique ;*
- ▷ *Coordonnées cartésiennes.*




On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ et infinie dans les directions $x$ et $y$, chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge $\rho_0$.

**1 -** Montrer que le champ électrique prend en tout point $M$ de l'espace la forme

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{e}_z\,.$$

**2 -** Calculer le champ créé par la distribution dans tout l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

**3 -** Que vaut le champ dans le plan $(xOy)$ ? Interpréter par des arguments de symétrie.

**4 -** Tracer le graphe représentant $E_z(z)$ pour $\rho_0 > 0$. Commenter le comportement de $\vec{E}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine : $a \to 0$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de charge $\sigma_0$ uniforme à partir des résultats précédentes.

**5 -** Exprimer la densité surfacique de charge $\sigma_0$ en fonction de $\rho_0$ et $a$. Que devient le champ électrique dans chaque demi-espace ?

**6 -** Commenter le comportement de $\vec{E}$ au passage du plan chargé.

## Exercice 3 : Noyau atomique — 1 | 2

- ▷ *Charge volumique non uniforme ;*
- ▷ *Coordonnées sphériques.*

La répartition de charge au sein de certains noyaux atomiques peut être modélisée par une densité volumique de la forme

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right) & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a$ est le rayon du noyau et $r$ est la distance au centre $O$.

**1 -** Exprimer $\rho_0$ en fonction du numéro atomique $Z$ du noyau.

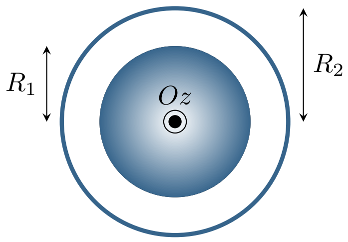
**2 -** Calculer le champ électrostatique créé par le noyau en tout point de l'espace.

**3 -** Représenter graphiquement sa norme en fonction de $r$.

**4 -** Si on avait souhaité calculer seulement le champ ressenti par un électron de l'atome, quelle démarche beaucoup plus simple aurait-on pu adopter ? Expliquer pourquoi elle s'applique.

## Exercice 4 : Deux cylindres concentriques 1 | 2 |

- *Charge volumique non-uniforme ;*
- *Charge surfacique ;*
- *Relation de passage ;*
- *Coordonnées cylindriques.*




On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques infinis de même axe $Oz$. Le premier cylindre, de rayon $R_1$, est un cylindre plein chargé en volume par une densité de charge $\rho(r) = -\alpha r$ ($\alpha > 0$, $r \leq R_1$). Le second cylindre, de rayon $R_2 > R_1$ est un cylindre creux chargé uniquement sur son pourtour extérieur avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

**1 -** Calculer le champ électrique créé par cette distribution.

**2 -** Étudier la continuité de $\vec{E}$ en $r = R_1$ et $r = R_2$. Commenter.

**3 -** Représenter sa composante non nulle en fonction de $r$.

# Champs électrostatiques

## Exercice 5 : Champ électrostatique dans une cavité oral banque PT | 2 | 2 |

- *Charge volumique uniforme ;*
- *Principe de superposition ;*
- *Coordonnées sphériques, coordonnées intrinsèques.*

Une boule de centre $O$ et de rayon $R$ contient des charges dont la densité volumique $\rho$ est homogène.

**1 -** Calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}(M)$.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon $R' < R$.

**2 -** Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.

**3 -** On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de $OO' = a < R'$. Déterminer le champ électrique dans la cavité.

## Exercice 6 : Nuage d'orage oral banque PT | 2 | 3

- *Charge volumique non uniforme ;*
- *Équation de Maxwell-Gauss.*

L'apparition de cumulonimbus, nuage colossal au profil en forme d'enclume, voir figure 1, est annonciatrice d'un orage imminent. On modélise dans cet exercice un nuage typique, situé entre les altitudes $h_1 = 2\,\mathrm{km}$ et $h_2 = 10\,\mathrm{km}$. On se place à proximité suffisante du centre du nuage pour pouvoir négliger les effets de bord : toutes les grandeurs sont supposées ne dépendre que de $z$. On pose $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ et $H = h_2 - h_1$.

On constate habituellement dans ces nuages l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet : on considérera que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ au sommet du nuage à la valeur opposée $-\rho_0$ à sa base. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500\,\mathrm{m}$. On les supposera réparties uniformément avec une densité volumique $\rho_{\mathrm{sol}}$. Le sol est supposé bon conducteur. L'air entre $z = h$ et $z = h_1$ n'est pas chargé.

Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : quasiment nul au niveau du sol, environ $65\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$ à $500\,\mathrm{m}$ d'altitude et jusqu'à $200\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

**1 -** Expliquer le phénomène d'influence à l'origine de la présence des charges au sol. La conservation de la charge ne semble pas vérifiée sur le schéma. Comment expliquer ce paradoxe ?

**2 -** Justifier qu'en tout point $M$ on ait $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.

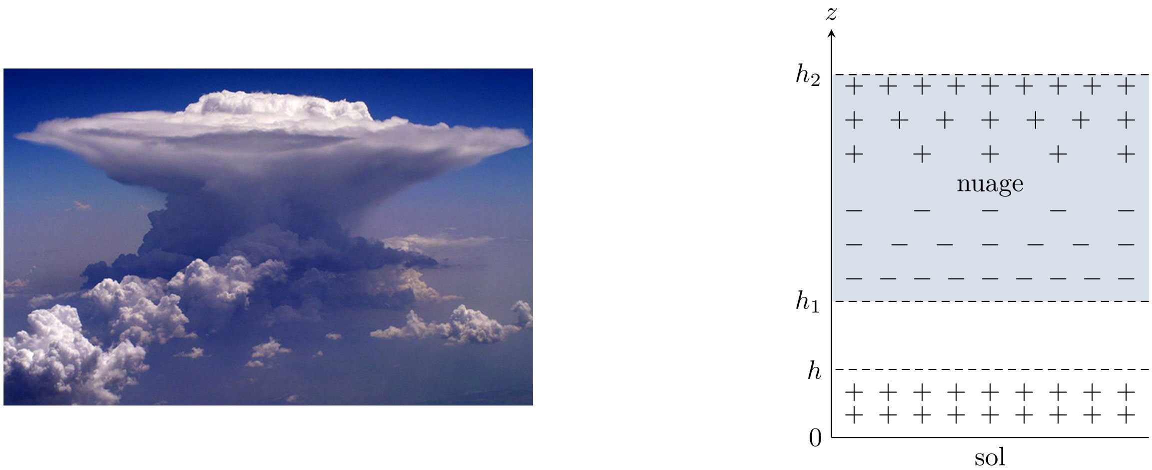



**Figure 1 – Répartition de charges au sein d'un nuage d'orage.** arg2

**3 -** Déterminer le champ électrique dans les quatre domaines $0 < z < h$ ; $h < z < h_1$ ; $h_1 < z < h_2$ et enfin $z > h_2$.

**4 -** Tracer l'allure de $E(z)$.

**5 -** Sachant que que $E(z)$ admet un extrêmum au milieu du nuage, exprimer $E_{\text{max}}$ en fonction de $h$ et $H$. On supposera $\rho_0 \simeq \rho_{\text{sol}}$.

**6 -** Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{\text{dis}} = 10\,\text{kV}\cdot\text{cm}^{-1}$, appelé champ disruptif, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible. Comparer la valeur du champ disruptif à celle du champ électrique dans le nuage. Commenter.

## Exercice 7 : Distribution cylindrique créant un champ de norme uniforme — 3 | 2

- *Coordonnées cylindriques ;*
- *Théorème de Gauss.*

Considérons une distribution de charge à symétrie cylindrique, entièrement contenue à l'intérieur d'un cylindre de rayon $R$ et de hauteur infinie. Deux informations sont connues sur cette distribution : d'une part, la charge totale est positive, d'autre part le champ qu'elle créé à l'intérieur du cylindre de rayon $R$ est de norme $E_0$ uniforme.

**1 -** Déterminer la direction du champ créé par cette distribution et les variables dont il peut dépendre.

**2 -** Déterminer la charge $q(r)$ contenue à l'intérieur d'un cylindre de rayon $r$ quelconque.

**3 -** En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$.

**4 -** Déterminer le champ créé par cette distribution pour $r > R$.

## Exercice 8 : Champ créé par un disque chargé — oral banque PT | 3 | 3

- *Théorème de Gauss sur une surface mésoscopique.*

On considère un disque de normale $\vec{e}_z$, de rayon $R$ et centre $O$. Il porte une charge surfacique $\sigma > 0$. En un point $M$ de l'axe du disque, on admet que

$$||\vec{E}(M)|| = E_{\text{axe}}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2+R^2}}\right).$$

**1 -** Déterminer la direction et le sens du champ électrostatique.

**2 -** Comment évolue la norme du champ ? Étudier les limites $z \to 0$ et $z \to \infty$.

On cherche maintenant à déterminer le champ électrostatique créé par le disque en un point $M$ situé au voisinage de l'axe.

**3 -** Appliquer le théorème de Gauss à un cylindre de petit rayon $r$ et compris entre les cotes $z$ et $z + \mathrm{d}z$. En déduire que la composante radiale $E_r$ vérifie

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}(z)}{\mathrm{d}z}$$

**4 -** En déduire $\vec{E}(M)$.

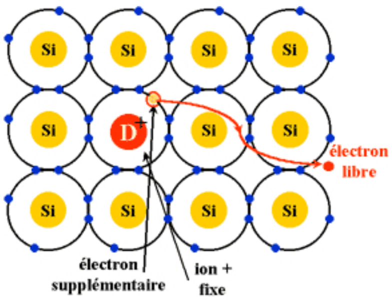
## Exercice 9 : Diode à jonction PN

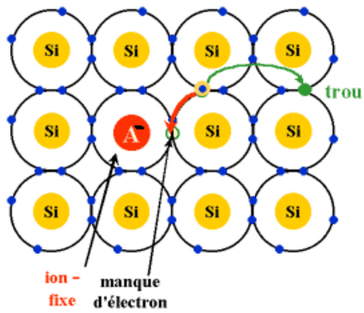
3 | 2

- *Analyse de document ;*
- *Équation de Maxwell-Gauss ;*
- *Principe de superposition.*

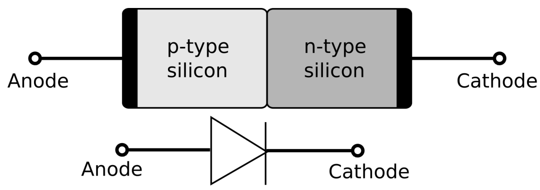
### Document 1 : Jonction PN au silicium

Dans un métal, les porteurs de charge libres, à même d'assurer la conduction électrique, sont tous de même type : des électrons. Dans un semi-conducteur comme le silicium, les porteurs de charge peuvent au contraire être de deux types différents : des électrons, de charge $-e$, et des trous, que l'on peut voir comme des « vides d'électrons » de charge apparente $+e$. Dans un semi-conducteur simple, on rencontre autant d'électrons que de trous. Le dopage d'un semi-conducteur consiste à lui ajouter, en faible quantité, des hétéroatomes donneurs ou accepteurs d'électrons qui modifient la proportion de porteurs libres de chaque type : dans un semi-conducteur de type N (négatif), la conduction électrique est majoritairement assurée par des électrons, alors que dans un semi-conducteur de type P (positif), la conduction est principalement due aux trous. Exactement comme un métal, un semi-conducteur reste globalement neutre quel que soit le dopage, seul change le nombre de porteurs libres de chaque type.

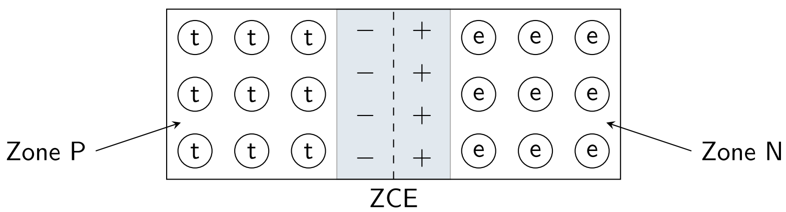



Il est possible de changer brutalement la nature du dopage dans un même cristal, formant alors une jonction PN. C'est ainsi que sont fabriquées les diodes au silicium ou les cellules photovoltaïques, alors qu'un transistor est réalisé en mettant deux jonctions successives en sens inverse, PNP ou NPN.




La proximité des deux zones P et N va entraîner une migration par diffusion des trous vers la zone N et des électrons vers la zone P, et par suite des recombinaisons de paire électron-trou. Ce mécanisme entraîne l'apparition d'une zone intermédiaire autour de la jonction, appelée zone de charge d'espace (ZCE) ou zone de déplétion, dans laquelle la zone N se trouve localement chargée positivement et la zone P chargée négativement. C'est la présence de cette zone de charge d'espace qui est à l'origine du comportement de la diode, qui ne laisse passer le courant que dans un seul sens.



**1 -** Les hétéroatomes accepteurs d'électrons sont-ils à l'origine d'un dopage de type N ou P ? Expliquer.

**2 -** Justifier précisément que la zone P de la ZCE est chargée négativement et la zone N positivement.

**3 -** Pourquoi la ZCE a-t-elle nécessairement une extension spatiale limitée ?

L'objectif des questions suivantes est de déterminer le champ électrique régnant dans la ZCE. Les électrons et les trous n'ayant pas forcément à la même capacité à migrer dans les zones N et P, celle-ci peut être dissymétrique. On la modélise donc par la distribution de charge $\rho(x)$ uniforme par morceaux représentée figure 2. La section $S$ du semi-conducteur est supposée indépendante de $x$.

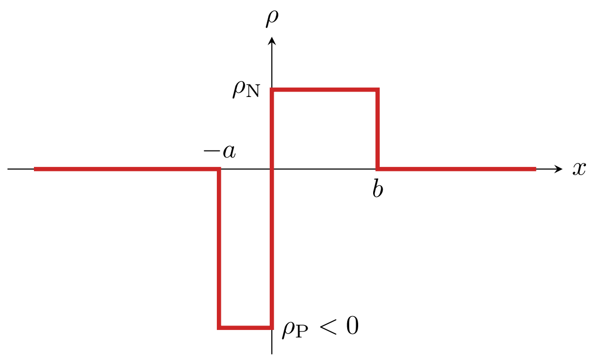



**Figure 2** – **Modélisation de la densité volumique de charge dans la ZCE d'une diode à jonction.** Les deux largeurs $a$ et $b$ sont positives, mais les densités de charge $\rho_\mathrm{P}$ et $\rho_\mathrm{N}$ sont algébriques.

**4 -** La ZCE étant globalement neutre, déterminer la relation entre $a, b, \rho_\mathrm{P}$ et $\rho_\mathrm{N}$.

**5 -** On considère dans cette question une distribution uniforme de densité volumique $\rho_0$ comprise entre les plans d'équation $x = -d/2$ et $x = +d/2$ où $d$ est une largeur.
***5.a* -** Déterminer la direction du champ électrostatique créé par cette distribution et les variables dont il dépend.
***5.b* -** Par des arguments de symétrie, montrer que $\vec{E}(x=0) = \vec{0}$.
***5.c* -** Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss le champ $\vec{E}$ dans tout l'espace.

**6 -** À partir de la question précédente, déterminer sans calcul complexe le champ électrostatique créé par la ZCE en fonction de $x$, $a$, $b$ et $\rho_\mathrm{N}$.

**7 -** Représenter les variations de la composante non-nulle de $\vec{E}$ en fonction de $x$.

**8 -** Imposer une tension aux borne de la diode entraîne l'apparition d'un champ électrique à l'intérieur de celle-ci. Quelle est le sens du champ à appliquer pour que la diode soit passante ? Laquelle des deux zones P ou N doit être portée au potentiel le plus élevé ? En déduire le sens passant du courant dans la diode.

## Analogie gravitationnelle

### Exercice 10 : Champ gravitationnel créé par le Soleil 1 | 1

▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*

On modélise le Soleil par une boule de rayon $R$ et de masse volumique $\mu_0$ uniforme. On cherche à déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par le Soleil en tout point de l'espace.

**1 -** Déterminer la direction de $\vec{G}$ et les variables dont il dépend.

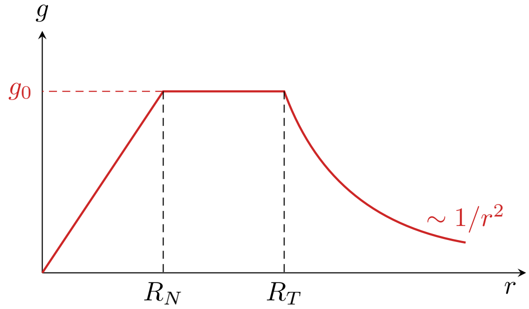
**2 -** En raisonnant sur l'analogie formelle entre force de gravitation et force de Coulomb, retrouver le théorème de Gauss gravitationnel.

**3 -** En déduire l'expression de $\vec{G}$.

**4 -** Calculer la force gravitationnelle que vous subissez de la part du Soleil, connaissant sa masse $M_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg et la distance Terre-Soleil $D = 1{,}5 \cdot 10^{14}$ m. Comparer à la force gravitationnelle que vous subissez de la part de la Terre.

## Exercice 11 : Profil de masse volumique au sein de la Terre — oral banque PT | 3 | 2

▷ *Théorème de Gauss gravitationnel.*




On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre $O$, de rayon $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ et de masse totale $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ vérifie la relation

$$\oiint_\Sigma \vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}\, M_{\mathrm{int}}$$

où $M_{\mathrm{int}}$ est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée $\Sigma$, et $\mathcal{G} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ est la constante de gravitation.

**1 -** À quel résultat d'électrostatique cette relation est elle similaire ? Préciser les analogues de $\vec{g}$, $\mathcal{G}$ et $M_{\mathrm{int}}$.

**2 -** On considère dans un premier temps la masse uniformément répartie. Exprimer $\vec{g}(r) = -g(r)\vec{u}_r$. Représenter $g(r)$ en fonction de $r$.

**3 -** Retrouver la valeur $g_0$ du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

**4 -** En réalité la répartition de masse n'est pas uniforme : le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure ci-dessus. Déterminer la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre.