Électronique en régime sinusoïdal forcé

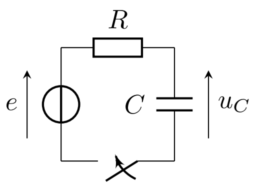
Dans les chapitres E2 à E4, nous avons toujours considéré le forçage constant, éventuellement nul dans le cas des régimes libres, ce qui rend quasiment immédiate la détermination des régimes permanents. Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas d'un forçage dépendant du temps de manière sinusoïdale. Cela ne change pas l'étude des transitoires, mais enrichit nettement l'étude du régime permanent.

Le choix d'un forçage harmonique peut sembler réducteur, mais le **théorème de Fourier** le rend fondamental : un forçage quelconque peut s'écrire comme une somme de forçages harmoniques.

I - Phénoménologie : exemple du circuit RC série

Cet exemple-type n'a en soi pas plus d'intérêt qu'un autre, mais va nous servir comme support pour observer les principales caractéristiques du RSF.

I.1 - Étude numérique

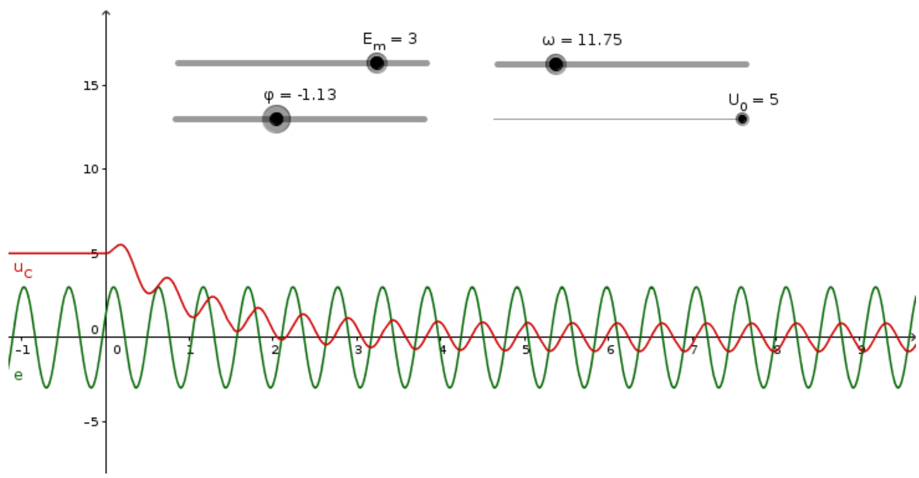


Considérons le circuit représenté ci-contre. La source idéale de tension impose un forçage harmonique,

$$e(t) = E_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)\,,$$

À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. Pour que les phénomènes soient mieux visibles, on suppose que $u_C(0) = U_0 \neq 0$. On étudie numériquement la réponse $u_C(t)$ en faisant varier les différents paramètres du forçage e.

❖ ***Animation Geogebra : à consulter sur le site de la classe.***



- **Allure générale :**

La réponse $u_C(t)$ est globalement oscillante. On y observe un régime transitoire d'une durée de l'ordre de $\tau = RC$ (pris égal à 1 dans la simulation), où les oscillations ne sont pas symétriques, avant d'atteindre un régime permanent.

Espace 1

Étienne Thibierge, 3 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

- **Influence de l'amplitude du forçage :**

Espace 2

- **Influence de la phase initiale du forçage :**

Espace 3

- **Influence de la pulsation du forçage :**

Espace 4

I.2 - Difficultés posées par l'approche temporelle

Cherchons l'expression de $u_C(t)$ via la résolution d'une équation différentielle.

Équation différentielle : cf. chapitre E2.

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{e(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau}E_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.$$

Forme générale des solutions :

▷ **Solution homogène :** $u_{C,\mathrm{h}}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec A une constante.

▷ **Solution particulière :** on cherche u_C du même type que le forçage, c'est-à-dire harmonique de pulsation ω. Compte tenu des observations précédentes, son amplitude U_m et sa phase initiale φ' sont inconnues. Ainsi, on cherche

$$u_{C,\mathrm{p}}(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi')\,.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = -\omega U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi')$$

si bien que l'équation différentielle donne qu'à tout instant t,

$$-\omega U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi') + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi') = \frac{1}{\tau}E_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Trouver $u_{C,\mathrm{p}}$ implique donc de trouver U_m et φ' à partir de cette équation, impliquant trois fonctions trigonométriques avec des préfacteurs différents.

⇝ l'approche temporelle donnerait lieu à des calculs techniquement ardus, ce qui justifie d'introduire une méthode plus puissante qui permet des calculs plus faciles.

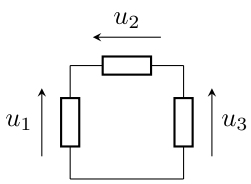
III - Lois de l'électronique en représentation complexe

III.2 - Lois de Kirchoff

Idée : l'amplitude complexe d'une somme est la somme des amplitudes complexes, donc toutes les lois qui font intervenir des sommes se généralisent directement en termes d'amplitude complexe.

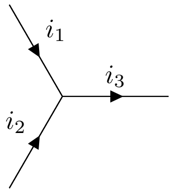
Attention ! Cela suppose que toutes les grandeurs sont harmoniques de même pulsation.

- **Loi des mailles**



$$u_1 = u_2 + u_3 \qquad \text{donc} \qquad \underline{U_1} = \underline{U_2} + \underline{U_3}$$

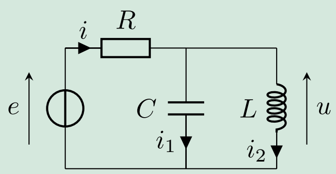
- **Loi des nœuds**



$$i_1 + i_2 = i_3 \qquad \text{donc} \qquad \underline{I_1} + \underline{I_2} = \underline{I_3}$$

Une méthode très fréquente pour étudier les circuits en RSF est d'utiliser la loi des nœuds, puis de se ramener aux tensions par l'intermédiaire des admittances complexes.

Exercice C3 : Application de la loi des nœuds



En appliquant la loi des nœuds et en utilisant les admittances complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$.

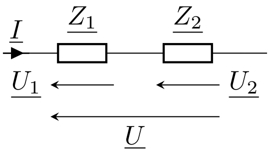
Espace 5

III.3 - Associations de dipôles

a) Impédances équivalentes

Idée : utiliser les impédances complexes permet de faire comme si tous les dipôles étaient des résistances.

- **Association série de deux dipôles quelconques**

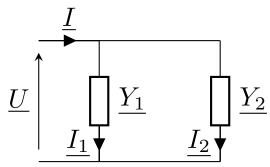


Espace 6

Point très important : aucune hypothèse de faite sur la nature des dipôles !

> L'impédance complexe d'une association série est la somme des impédances complexes des différents dipôles, et ce quelle que soit leur nature.

- **Association parallèle de deux dipôles quelconques**



Espace 7

> L'admittance complexe d'une association parallèle est la somme des admittances complexes des différents dipôles, et ce quelle que soit leur nature.

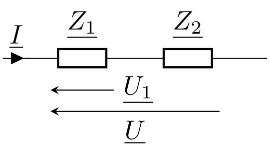
Attention ! Ne pas confondre impédance et admittance ...

b) Ponts diviseurs

En tant que conséquence des lois de Kirchoff et de la loi d'Ohm, la généralisation est immédiate, mais les relations s'appliquent désormais à n'importe quels dipôles.

- **Pont diviseur de tension**

Un pont diviseur de tension est constitué de deux dipôles montés en série.

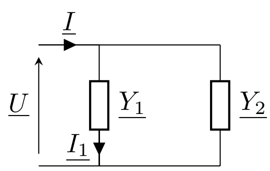


$$\begin{cases} \underline{U} = \left(\underline{Z_1} + \underline{Z_2}\right) \underline{I} \\ \underline{U_1} = \underline{Z_1}\, \underline{I} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\underline{U_1}}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,.}$$

L'utilisation d'un pont diviseur de tension est l'autre méthode très utilisée pour étudier les circuits en RSF.

- **Pont diviseur de courant**

Un pont diviseur de courant est constitué de deux dipôles montés en parallèle. Il est plus simple de retenir la relation du pont diviseur de courant en termes d'admittances.



$$\begin{cases} \underline{I} = \left(\underline{Y_1} + \underline{Y_2}\right) \underline{U} \\ \underline{I_1} = \underline{Y_1}\, \underline{U} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\underline{I_1}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y_1}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2}}\,.}$$