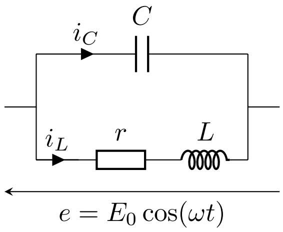
Électronique 6 – Travaux dirigés Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Analyse fréquentielle des systèmes linéaires, phénomènes de résonance

Exercices

Exercice 1 : Circuit bouchon [♦♦♢]



Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.

1 - Question préliminaire : exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{s}}$ d'un dipôle où r, L et C seraient montés *en série*, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2 - Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{r}{\mathrm{j}C\omega\,\underline{Z_\mathrm{s}}}\left(1 + \frac{\mathrm{j}Q\omega}{\omega_0}\right).$$

3 - Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega \gg \omega_0/Q$) l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée

$$\underline{Z} \simeq \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z_\mathrm{s}}}.$$

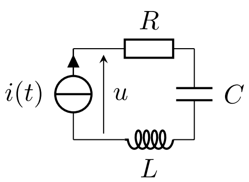
On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4 - Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de « circuit bouchon ».

5 - On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 2 : Circuit RLC série forcé en courant [♦♦♢]

> *La question 3 est très (trop) calculatoire. Le reste de l'exercice, classique et à maîtriser, peut être travaillé en admettant les expressions de $\omega_{1,2}$.*



Considérons un circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de courant imposant $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t)$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe $\underline{U}$ et l'écrire sous la forme

$$\underline{U} = R\left[1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\underline{I}.$$

2 - Justifier que ce circuit ne présente pas de résonance en tension, mais une anti-résonance pour laquelle le rapport $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m}$ est minimal. Déterminer la pulsation d'anti-résonance ω_a. Que vaut le déphasage entre i et u à cette pulsation ? L'existence de l'anti-résonance dépend-elle du facteur de qualité du circuit ?

3 - On s'intéresse à la largeur en fréquence de l'anti-résonance. Montrer que les pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles que $|\underline{U}(\omega_1)| = |\underline{U}(\omega_2)| = \sqrt{2}\,|\underline{U}(\omega_\mathrm{a})|$ sont données par

$$\omega_{1,2} = \Omega \pm \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\,.$$

En déduire la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de l'anti-résonance.

4 - Des relevés expérimentaux de $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m}$ et du déphasage de u par rapport à i sont représentés figure 1. En déduire la fréquence propre et le facteur de qualité du circuit.

Étienne Thibierge, 22 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

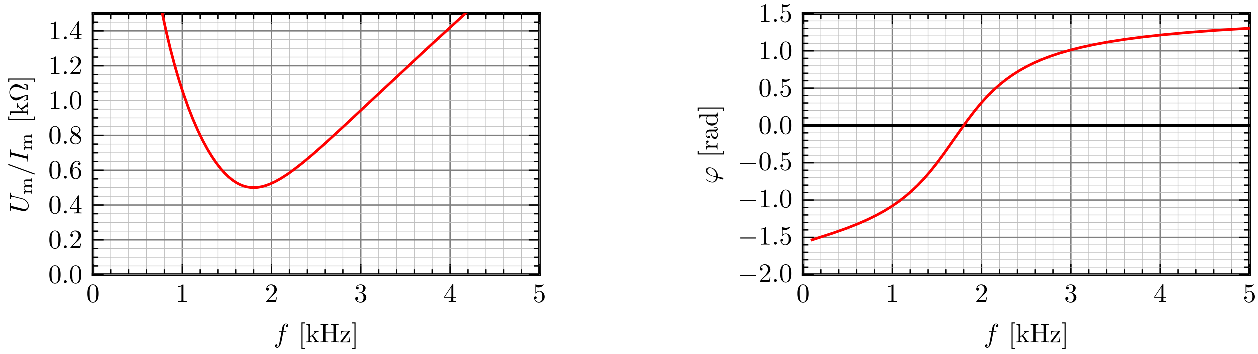
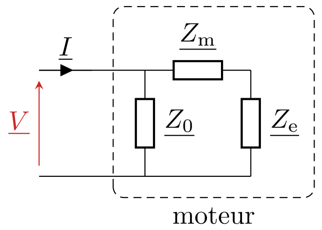


Figure 1 – Mesures d'amplitude et de déphasage.

Exercice 3 : Résonance en courant d'un moteur [♦♦◊]



Un moteur à ultrasons est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude complexe $\underline{V}$, on note $\underline{I}$ l'amplitude complexe du courant passant dans le moteur. Pour que le rendement du moteur soit optimal, il doit être alimenté à une fréquence égale à sa fréquence de résonance en courant.

Le moteur est équivalent au schéma ci-contre. $\underline{Z_0}$ représente l'impédance complexe intrinsèque du moteur. Les phénomènes électromécaniques au sein du moteur sont pris en compte, sur ce schéma, par une impédance $\underline{Z_m}$ appelée impédance motionnelle et par une impédance $\underline{Z_c}$ dont la valeur est fonction de la charge mécanique du moteur.

Le dipôle d'impédance $\underline{Z_0}$ est constitué d'une résistance $R_0 = 18\,\mathrm{k\Omega}$ en parallèle d'un condensateur $C_0 = 8\,\mathrm{nF}$. L'impédance motionnelle $\underline{Z_m}$ est celle d'un circuit RLC série avec $R = 50\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$ et $C = 0{,}2\,\mathrm{nF}$. Enfin, l'impédance de charge $\underline{Z_c}$ correspond à une résistance R_c dans un premier temps prise égale à $50\,\Omega$.

1 - Reproduire le schéma du moteur en remplaçant les éléments $\underline{Z_0}$, $\underline{Z_m}$ et $\underline{Z_c}$ par les résistances, inductances et condensateurs qui leur correspondent.

2 - Déterminer la pulsation de résonance en courant ω_s du circuit série constitué de $\underline{Z_m}$ et $\underline{Z_c}$.

On note $\underline{Y}$ l'admittance complexe équivalente à l'ensemble du moteur. La figure 2 représente l'évolution du module $Y = |\underline{Y}|$ en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_s$.

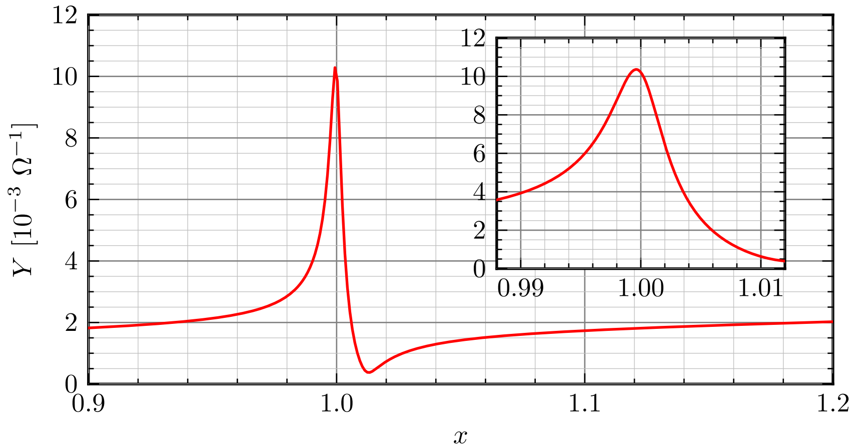


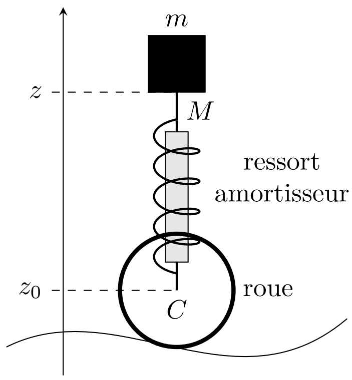
Figure 2 – Module de l'admittance du moteur en fonction de la pulsation réduite. La courbe en insert représente un zoom de la courbe principale au voisinage de $x = 1$.

3 - Justifier que la résonance en courant correspond au maximum de la courbe d'admittance. Déterminer numériquement la fréquence f_r de résonance du moteur.

4 - Comparer numériquement $Y_0 = \left|\underline{Y_0}\right|$ et Y_s le module de l'admittance $\underline{Y_s} = 1/(\underline{Z_m} + \underline{Z_c})$ lorsque $\omega = \omega_s$. Commenter l'écart entre ω_s et ω_r.

5 - Une modification de la charge mécanique du moteur provoque une variation de la résistance R_c de l'ordre d'une dizaine d'ohms. Cette variation a-t-elle un effet significatif sur la fréquence de résonance en courant ? En quoi est-ce un avantage pour le fonctionnement du moteur ?

Exercice 4 : Suspension d'un VTT [♦♦◊]



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ corresponde à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_{\mathrm{a}} = -\alpha(v_z - v_{z0})\vec{u}_z$$

où $v_z = \dot{z}$ et $v_0 = \dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_{e}, en régime dit stabilisé. Déterminer z_{e} en fonction de m, g, k et L_0.

2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_{\mathrm{e}}$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t)\,,$$

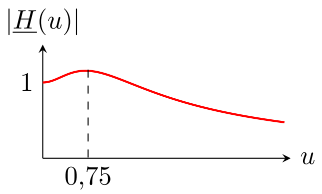
où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_{m} et de pulsation ω.
3.a **-** Pourquoi ne perd-on pas en généralité en faisant cette hypothèse ?
3.b **-** Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Cacluler son amplitude V_{m} en fonction de F_{m}.

4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse (horizontale !) V sur un chemin fait de cailloux de taille typique ℓ, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

Analyse fréquentielle des systèmes linéaires, phénomènes de résonance

Exercices

Exercice 1 : Circuit bouchon

1 Les impédances s'ajoutant en série,

$$\boxed{\underline{Z_s} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\,.}$$

En factorisant par r,

$$\underline{Z_s} = r\left[1 + \frac{jL\omega}{r} + \frac{1}{jrC\omega}\right]\,.$$

À partir des expressions données de Q et ω_0, on identifie

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{r} \qquad \text{et} \qquad Q\omega_0 = \frac{L\omega_0^{\,2}}{r} = \frac{L}{rLC} = \frac{1}{rC}\,.$$

> *« L'astuce » qui consiste à exprimer $Q\omega_0$ et ω_0/Q en fonction des composants pour pouvoir identifier sert très souvent. Il peut être bon de la retenir.*

On en déduit

$$\underline{Z_s} = r\left[1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0} + \frac{Q\omega_0}{j\omega}\right]$$

et en factorisant de nouveau

$$\boxed{\underline{Z_s} = r\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\,.}$$

> *Pour partir dans la bonne direction sur cette question, il est nécessaire d'avoir déjà une certaine idée du résultat ...*

2 En sommant les admittances montées en parallèle,

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega} = \frac{1 + jC\omega(r + jL\omega)}{r + jL\omega}$$

d'où

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jC\omega(r + jL\omega)}\,.}$$

Factorisons par r au numérateur et par $jC\omega$ au dénominateur :

$$\underline{Z} = \frac{r\left(1 + \dfrac{jL\omega}{r}\right)}{jC\omega\left(\dfrac{1}{jC\omega} + r + jL\omega\right)}\,.$$

On en déduit directement la forme cherchée

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\,\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)\,.}$$

3 Compte tenu des hypothèses,

$$1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0} \simeq \frac{jQ\omega}{\omega_0}\,,$$

donc

$$\underline{Z} \simeq \frac{\mathrm{j}rQ\omega}{\mathrm{j}C\omega\omega_0\underline{Z_\mathrm{s}}} = \frac{rQ}{C\omega_0\underline{Z_\mathrm{s}}}\,.$$

Or on a montré à la question 1 que

$$Q\omega_0 = \frac{1}{rC} \qquad \text{donc} \qquad C\omega_0 = \frac{1}{rQ}$$

et ainsi

$$\boxed{\underline{Z} \simeq \frac{Q^2r^2}{\underline{Z_\mathrm{s}}}\,.}$$

4 D'après la question précédente, $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $|\underline{Z_\mathrm{s}}|$ est minimal. Or d'après la question 1,

$$|\underline{Z_\mathrm{s}}| = r\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\,.$$

Ainsi $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque le terme entre parenthèses est nul, soit pour $\omega = \omega_0$.

À cette pulsation, $\underline{Z_\mathrm{s}} = r$, et ainsi

$$\boxed{\underline{Z} = Q^2 r\,.}$$

Le dipôle est donc **équivalent à une résistance $Q^2r \gg r$** qui peut être très élevée : le circuit bloque le passage du courant, d'où la dénomination de circuit bouchon.

> *Pour des ordres de grandeurs accessibles en TP, la résistance interne d'une bobine est de l'ordre de quelques dizaines d'ohms et le facteur de qualité atteint sans problème 20. On obtient donc une résistance effective de plusieurs dizaines de kiloohms.*

5 En utilisant les amplitudes complexes, et comme $\omega = \omega_0$,

$$\underline{I_C} = \underline{Y_C}\,\underline{E} = \mathrm{j}C\omega_0 E_0 = \mathrm{j}\frac{1}{rQ\omega_0}\omega_0 E_0 = \mathrm{j}\frac{E_0}{rQ}\,.$$

On en déduit $|\underline{I_C}| = E_0/rQ$ et $\arg \underline{I_C} = +\pi/2$, d'où

$$\boxed{i_C(t) = \frac{E_0}{rQ}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\,.}$$

Si Q est très élevé, l'amplitude est comme attendue très faible.

De même, on exprime

$$\underline{I_L} = \underline{Y_L}\,\underline{E} = \frac{1}{r+\mathrm{j}L\omega_0}E_0 = \frac{1}{r\left(1+\dfrac{\mathrm{j}L\omega_0}{r}\right)}E_0 \simeq \frac{1}{\mathrm{j}Qr}E_0\,.$$

On en déduit $|\underline{I_L}| = E_0/rQ$ et $\arg \underline{I_L} = -\pi/2$, d'où

$$\boxed{i_L(t) = \frac{E_0}{rQ}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On constate que les deux intensités sont d'amplitude proportionnelle à $1/Q$ et sont donc très faibles, comme attendu. De plus, i_C et i_L sont en opposition de phase et de même amplitude : leur somme $i_C + i_L$ est donc nul, le circuit bouchon n'est traversé par aucun courant à la pulsation de résonance, ce qui explique à nouveau sa dénomination.

> *Le dernier point n'est pas tout à fait exact, car l'expression de i_L est une approximation ... mais dans tous les cas, le courant qui traverse le circuit est très faible.*

Exercice 2 : Circuit RLC série forcé en courant

1 La tension $\underline{U}$ est reliée au courant $\underline{I}$ par l'intermédiaire de l'impédance complexe de l'association RLC série, $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$. Cette impédance s'écrit simplement

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = R + \mathrm{j}L\omega - \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

En factorisant,

$$\underline{Z} = R\left[1 + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right]\,.$$

Par identification selon ω avec la forme donnée par l'énoncé,

$$\frac{\mathrm{j}L\omega}{R} = \frac{\mathrm{j}Q\omega}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega} = -\frac{\mathrm{j}Q\omega_0}{\omega} = \frac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\,.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \qquad \text{et} \qquad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}\,.$$

On en déduit par substitution

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.}$$

2 On a

$$\frac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}} = |\underline{Z}| = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\,.$$

Dans les deux limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$, l'amplitude U_m diverge. Ainsi, elle ne passe (probablement) pas par un maximum entre ces deux limites. En revanche, la parenthèse contient une différence, qui peut s'annuler. La parenthèse étant mise au carré, 0 est évidemment sa valeur minimale, atteinte lorsque

$$\boxed{\omega = \omega_\mathrm{a} = \omega_0\,.}$$

Ce minimum existe toujours : **l'existence de l'anti-résonance ne dépend pas du facteur de qualité**.

Pour $\omega = \omega_\mathrm{a}$, l'impédance complexe du circuit est réelle positive : $\underline{Z} = R$. Le déphasage entre u et i, égal à $\arg \underline{Z}$, est donc nul.

3 D'après la question précédente,

$$|\underline{U}| = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\, I_\mathrm{m}$$

Cherchons les pulsations limites.

$$\begin{aligned}
|\underline{U}(\omega_{1,2}| &= \sqrt{2}\,|\underline{U}(\omega_\mathrm{a}| \\
R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2}\, I_\mathrm{m} &= \sqrt{2}RI_\mathrm{m} \\
1 + Q^2\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2 &= 2 \\
Q\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right) &= \pm 1
\end{aligned}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose $x = \omega_{1,2}/\omega_0$. On cherche donc à résoudre

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

ou encore

$$x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}$$

Les deux valeurs de x solutions de cette équation donnent les deux pulsations limite. Comme toujours, il faut transformer cette équation fractionnaire en équation polynômiale,

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Cette équation a un discriminant

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0\,.$$

On trouve alors quatre solutions mathématiquement possibles pour les pulsations réduites x

$$x_\pm = \pm\frac{1}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

mais seules deux sont physiquement acceptables car $x > 0$. Comme $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} < \frac{1}{Q}$ alors ces deux solutions sont

$$x_\pm = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \pm \frac{1}{2Q} \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{1,2} = \omega_0 x_\pm$$

et on en déduit finalement

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{-\omega_0}{2Q} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}\,.}$$

$\boxed{4}$ Estimer la fréquence propre est beaucoup plus précis à partir de la courbe de phase que de la courbe d'amplitude, puisque d'après la question 2, il suffit de repérer la fréquence pour laquelle $\varphi = 0$. On lit alors

$$\boxed{f_0 = 1{,}8\,\mathrm{kHz}\,.}$$

Pour déterminer le facteur de qualité, on estime la largeur en fréquence de la résonance à partir de la courbe d'amplitude : par définition, $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m} = |\underline{Z}|$. À l'anti-résonance, on lit graphiquement $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m} = 5\cdot 10^2\,\Omega$, donc f_1 et f_2 sont les fréquences telles que $U_\mathrm{m}/I_\mathrm{m} = \sqrt{2}\times 5\cdot 10^2\,\Omega = 7\cdot 10^2\,\Omega$. On lit sur la figure

$$f_1 = 1{,}3\,\mathrm{kHz} \qquad \text{et} \qquad f_2 = 2{,}5\,\mathrm{kHz}$$

On en déduit

$$\boxed{Q = \frac{\omega_\mathrm{a}}{\Delta\omega} = \frac{f_\mathrm{a}}{\Delta f} = 1{,}5}$$

Exercice 3 : Résonance en courant d'un moteur

$\boxed{1}$ Voir figure 3

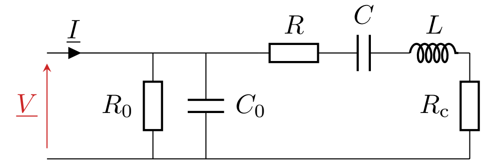


Figure 3 – Schéma complet du modèle électrique de moteur.

$\boxed{2}$ L'impédance $\underline{Z_\mathrm{s}}$ de l'ensemble série vaut

$$\underline{Z_\mathrm{s}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega + R_\mathrm{c} = (R + R_\mathrm{c}) + \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\,.$$

On cherche une résonance en courant, sous-entendu à $\underline{V}$ fixé : la fonction de transfert à considérer est l'admittance, dont le module est maximal quand celui de l'impédance est minimal. Xomme sa partie réelle ne dépend pas de ω, le minium est atteint pour la pulsation qui annule la partie imaginaire. Ainsi,

$$L\omega_\mathrm{s} - \frac{1}{C\omega_\mathrm{s}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad L\omega_\mathrm{s} = \frac{1}{C\omega_\mathrm{s}} \qquad \text{d'où} \qquad LC{\omega_\mathrm{s}}^2 = 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\omega_\mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.}$$

$\boxed{3}$ Par définition de l'admittance, $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{V}$, donc en termes d'amplitude $I_\mathrm{m} = YV_\mathrm{m}$. Comme la tension d'alimentation est fixée, l'amplitude du courant dans le moteur est maximale lorsque Y est maximal. Par lecture graphique, on constate que **la résonance est atteinte pour $x \simeq 1$**, soit

$$\omega_\mathrm{r} \simeq \omega_\mathrm{s} = 2{,}2\cdot 10^5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f_\mathrm{r} = 36\,\mathrm{kHz}\,.}$$

$\boxed{4}$ On trouve

$$\underline{Y_0}(\omega_s) = \frac{1}{R_0} + jC\omega_s \qquad \text{soit} \qquad Y_0 = \sqrt{\frac{1}{{R_0}^2} + C^2{\omega_s}^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}$$

et comme d'après la question 2 $\underline{Z_s} = R + R_c$ à la résonance, alors

$$Y_s = \frac{1}{R + R_c} = 1 \cdot 10^{-2}\,\Omega^{-1}\,.$$

On en conclut que l'admittance $\underline{Y_0}$ est bien plus faible que l'admittance $\underline{Y_s}$, ce qui justifie d'avoir

$$\underline{Y} = \underline{Y_0} + \underline{Y_s} \simeq \underline{Y_s}$$

et donc que la fréquence de résonance du moteur soit quasiment égale à la fréquence de résonance de l'impédance motionelle.

$\boxed{5}$ Suite à cette modification de la charge, $Z_s = R + R_c$ varie de 10 % tout au plus, et il en est donc de même pour Y_s. On a donc toujours $Y_s \gg Y_0$, ce qui permet toujours d'assimiler la fréquence de résonance du moteur à celle de son impédance motionnelle. Comme R_c n'intervient pas dans l'expression de ω_s, on en déduit que **la fréquence de résonance du moteur ne change pratiquement pas** sous l'effet de la variation de charge. C'est un avantage pour le fonctionnement du moteur car **la fréquence de l'alimentation n'a pas besoin d'être adaptée à la charge** mécanique du moteur.

Exercice 4 : Suspension d'un VTT

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$, à la force $\overrightarrow{F}_r$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\overrightarrow{F}_a$ exercée par l'amortisseur.

$\boxed{1}$ Comme $z = z_e$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z. La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_r = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad -mg\overrightarrow{u}_z - k(z_e - L_0)\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_e = L_0 - \frac{mg}{k}\,.}$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

$\boxed{2}$ Appliquons la loi de la quantité de mouvement au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_r + \overrightarrow{F}_a \qquad \text{soit} \qquad m\ddot{z}\overrightarrow{u}_z = -mg\overrightarrow{u}_z - k\left[(z - z_0) - L_0\right]\overrightarrow{u}_z - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\overrightarrow{u}_z\,.$$

En projetant et en remplaçant z par $Z + z_e$ (donc $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$), on obtient

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = -mg - k(z_e - z_0) + kL_0 - \alpha\dot{z}_0$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F \qquad \text{avec} \qquad F = kz_0 + \alpha\dot{z}_0}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

$\boxed{3.a}$ L'équation différentielle est linéaire. Le théorème de Fourier permet donc d'écrire toute solution comme une somme de ses solutions harmoniques.

$\boxed{3.b}$ Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z.

On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_m\,e^{j\omega t}$ et $\underline{v_z} = V_m\,e^{j(\omega t + \varphi)}$. Comme $v_z = \dot{z} = \dot{Z}$, $\underline{v} = j\omega\underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$m(j\omega)^2\underline{Z} + \alpha j\omega\underline{Z} + k\underline{Z} = \underline{F} \qquad \text{d'où} \qquad mj\omega\underline{v_z} + \alpha\underline{v_z} + k\frac{\underline{v_z}}{j\omega} = \underline{F}\,,$$

et ainsi

$$\underline{v_z} = \frac{\underline{F}}{m\mathrm{j}\omega + \alpha - \dfrac{\mathrm{j}k}{m}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$\boxed{V_\mathrm{m} = \left|\underline{v_z}\right| = \frac{F_\mathrm{m}}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2}}}$$

4 $\underline{H}$ est une fonction de transfert mécanique. Elle représente la façon dont les oscillations du chemin (via $\underline{z_1}$) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v_z} = \mathrm{j}\omega\underline{Z}$ et $\underline{F} = k\underline{z_0} + \mathrm{j}\omega\alpha\underline{z_0}$, on obtient en remplaçant

$$\mathrm{j}\omega\underline{Z} = \frac{k\underline{z_0} + \mathrm{j}\omega\alpha\underline{z_0}}{m\mathrm{j}\omega + \alpha - \dfrac{\mathrm{j}k}{m}}$$

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}} = \frac{k + \mathrm{j}\alpha\omega}{k + \mathrm{j}\alpha\omega - m\omega^2}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k, on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2\mathrm{j}\xi u}{1 - u^2 + 2\mathrm{j}\xi u}}$$

5 Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. **Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux**. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !