# Vers la mécanique des solides

## Plan du cours



## Ce que vous devez savoir et savoir faire

▷ Différencier un solide d'un système déformable.
▷ Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire et une rotation autour d'un axe fixe.
▷ Définir le champ des vitesses d'un solide.
▷ Connaître et établir le champ des vitesses d'un solide en translation.

▷ Connaître et exploiter le lien entre la quantité de mouvement d'un système fermé et la vitesse de son centre d'inertie, l'établir pour un système de deux points matériels.
▷ Exploiter la loi de la quantité de mouvement pour déterminer les équations du mouvement du centre d'inertie d'un système fermé.
▷ Exploiter la loi de la quantité de mouvement pour déterminer une force inconnue, p.ex. une force de liaison.

▷ Savoir que les liaisons se modélisent par des forces inconnues a priori et dépendant du mouvement.
▷ Connaître et exploiter les caractéristiques phénoménologiques de la force de contact sur un support. Les lois de Coulomb doivent être rappelées.

## Questions de cours pour les colles

▷ Définir un solide indéformable.
▷ Définir une translation rectiligne, une translation circulaire et une rotation autour d'un axe fixe. Un schéma est indispensable pour donner une définition claire.
▷ Établir que le champ des vitesses d'un solide en translation est uniforme.
▷ Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système de deux points matériels et la généraliser au cas d'un solide.
▷ Établir le théorème de la résultante cinétique pour un système de deux points matériels et le généraliser au cas d'un solide.


Étienne Thibierge, 22 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

**Objectif du chapitre :** Étendre les notions vues jusqu'à présent pour des points matériels au cas des solides, qui est plus riche. On se restreint ici aux notions les plus élémentaires : la mécanique des solides est étudiée bien plus largement en cours de SI qu'en cours de physique !

> Un **solide indéformable** est un modèle de système matériel $\mathcal{S}$
> dont les points restent à distance constante les uns des autres au cours du temps.

**Remarque importante :** Deux solides indéformables liés entre eux ne forment pas un solide indéformable dès lors que la liaison permet un degré de liberté.

# I - Décrire le mouvement d'un solide indéformable

## I.1 - Exemples de mouvements particuliers

### a) Rappels sur la notion de trajectoire

Le mouvement d'un solide est caractérisé par la trajectoire de tous ses points. Dans ce paragraphe on décrit donc les types de mouvement à partir des trajectoires, d'autres caractérisations plus mathématiques seront abordées dans la suite du cours.

> On appelle **trajectoire d'un point** la courbe de ses positions successives au cours du temps.

Donner la trajectoire d'un point revient ni plus ni moins à dire par où il est passé. Ne parler que de trajectoire fait perdre toute notion de temps : on ne sait pas si elle est parcourue « vite » ou « lentement ».

> ***Remarque :*** *La trajectoire d'un point dépend du référentiel. Par exemple, la valve d'une roue de vélo a une trajectoire circulaire dans le référentiel lié au vélo mais une trajectoire cycloïdale dans le référentiel lié à la route.*

### b) Mouvement de translation

- **Cas général**

> Un solide a un **mouvement de translation** par rapport à un référentiel
> si pour tous points $M_1$ et $M_2$ du solide le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ garde une direction constante
> par rapport à ce référentiel tout au long du mouvement.

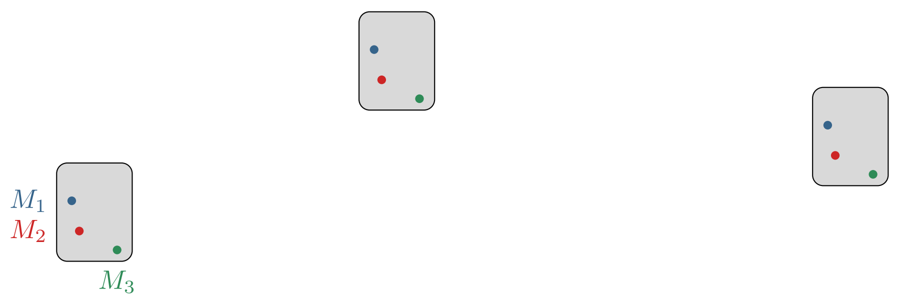
Comme le solide est indéformable, alors la norme $||\overrightarrow{M_1M_2}||$ est également constante, si bien qu'au cours d'un mouvement de translation le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est un vecteur constant.

$\rightsquigarrow$ tous les points du solide ont la même trajectoire « en décalé » (les trajectoires sont superposables) et ils la parcourent de la même façon.

**Conséquence essentielle :** utile pour identifier en pratique un mouvement de translation.

*Espace 1*

> ***Exemple :***



- **Cas particulier : translation rectiligne**

Si la trajectoire de chaque point du solide est un segment de droite, alors la translation est dite **rectiligne**.

Dans ce cas, tous les segments sont évidemment parallèles entre eux.

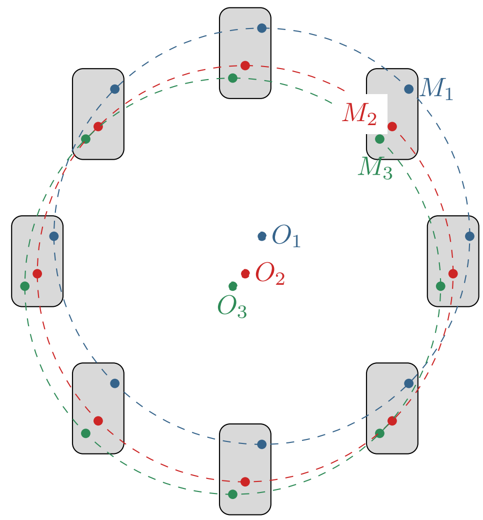
> ***Exemple :***
>
> 
> 

Le fait que les trajectoires soient des segments implique forcément que le mouvement est une translation, on parle donc souvent de « mouvement rectiligne » en sous-entendant qu'il s'agit d'une translation.

> ***Remarque :*** *Les oscillations verticales d'une masse attachée à un ressort sont un mouvement de translation rectiligne. Le fait qu'il y ait des oscillations (notion temporelle) n'empêche pas le mouvement d'être une translation (trajectoire).*

- **Cas particulier : translation circulaire**

Si la trajectoire de chaque point d'un solide *en translation* est un arc de cercle,
alors la translation est dite **circulaire**.

> ***Exemple :***
>
> 
> 

*Espace 2*

> ***Exemple de système en translation circulaire :***
>
> 

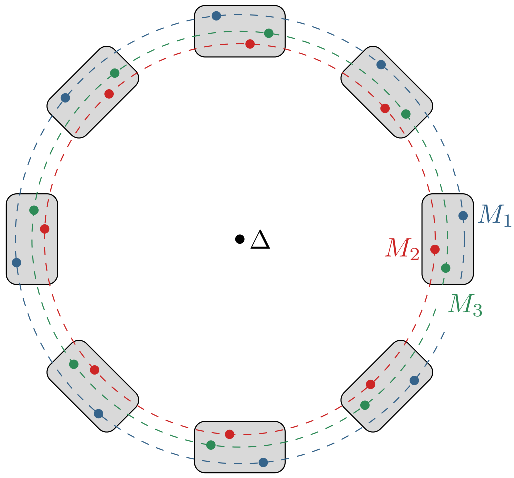
### c) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Attention à ne pas confondre une translation circulaire et une rotation autour d'un axe fixe.

Un solide a un **mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\Delta$**
si la distance de tout point du solide à tout point de cet axe est constante au cours du mouvement,

$$\forall M \in \mathcal{S}, \forall A \in \Delta, \quad ||\overrightarrow{AM}|| = \text{cte}$$

***Exemple :***




Espace 3

Espace 4

***Exemple de système en rotation autour d'un axe fixe :***

### d) Remarque finale

Ces exemples permettent de constater que les notions de *mouvement* et de *trajectoire* sont différentes. Parler de « mouvement d'un point » n'a pas vraiment de sens (qu'est-ce qui distinguerait une translation circulaire d'une rotation de point ?), et la notion de « trajectoire d'un solide » n'est définie que si elle est la même pour tous ses points, donc pour une translation. Un solide en rotation n'a pas de trajectoire à proprement parler.

De plus, décrire complètement le mouvement nécessite de s'intéresser à la façon dont les trajectoires sont parcourues au cours du temps, ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

## I.2 - Cinématique du solide

- **Repérage d'un solide indéformable**

Repérer un solide dans l'espace demande de repérer à la fois sa « position » et son « orientation ».

▷ repérer la « position » signifie donner les trois coordonnées spatiales d'un point de repère sur le solide, souvent son centre d'inertie (cf. suite) mais pas toujours, penser par exemple au point d'attache d'un ressort ;

▷ repérer « l'orientation » signifie définir un repère lié au solide et donner les trois angles entre les axes de ce repère et les axes d'un autre repère lié au référentiel d'étude.

Conclusion :

*Espace 5*

Par exemple, il est fréquent de repérer un solide par la donnée de ses angles d'Euler, voir le cours de SI. Dans le cadre du cours de physique, on se restreindra à des cas plus simples où certains de ces paramètres restent constants au cours du mouvement.

- **Champ des vitesses d'un solide**

On appelle **champ des vitesses d'un solide** la donnée du vecteur vitesse de chacun de ses points.

Cette donnée est souvent implicite, et peut se faire par exemple grâce au torseur cinématique et à la propriété de Varignon (aussi appelée propriété d'équiprojectivité),

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{v}_{A\in 1/0} \end{Bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v}_{B\in 1/0} = \vec{v}_{A\in 1/0} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}\,.$$

Dans cette écriture typée SI, 1 désigne le solide étudié et 0 le solide de référence … avec une écriture de physicien on les remplacerait par $\mathcal{S}$ pour le système étudié et $\mathcal{R}$ pour le référentiel.

***Exemple :*** *cas d'un solide en translation.*

*Espace 6*

*Le champ des vitesses est unfiorme : on peut donc parler sans ambiguïté de « la » vitesse du solide. Ce n'est pas le cas pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.*

***Remarque PT :*** *La notion de champ des vitesses s'étend aux systèmes déformables, on définit par exemple le champ des vitesses d'un fluide en écoulement.*

- **Champ des accélérations d'un solide**

Le champ des accélérations est défini de façon identique : c'est la donnée du vecteur accélération en chacun des points du solide.

Comme précédemment, le champ des accélérations d'un solide en translation est uniforme.

# II - Théorème de la résultante cinétique

Le théorème de la résultante cinétique est une conséquence du principe fondamental de la dynamique. Ce théorème est également appelé **loi de la quantité de mouvement** ou **théorème du centre d'inertie**.

## II.1 - Quantité de mouvement d'un solide

- **Idée de la démonstration**

Décomposer par la pensée un solide en un ensemble de points matériels de masse infinitésimale, et construire les quantités physiques pour le solide en sommant (en intégrant) celles pour des points matériels qui le constituent.

$\rightsquigarrow$ raisonnement qui s'applique très largement : outre la quantité de mouvement, on le retrouvera pour l'énergie cinétique, et vous l'appliquerez en PT dans le cadre de la mécanique des fluides.

- **Cas d'un système de deux points matériels**

Raisonnons sur un système $\mathcal{S}$ constitué de deux points matériels seulement, pour généraliser ensuite.

*Espace 7*

Un point qui joue un rôle particulier est le centre d'inertie du système formé par les deux points matériels.

*Espace 8*

Dans le cas de deux points,

Pour ensuite faire apparaître les vitesses, il est intéressant d'introduire le point origine $O$ via la relation de Chasles,

*Espace 9*

Ces deux définitions du centre d'inertie $G$ sont à connaître.

*Espace 10*

- **Généralisation**

Ce raisonnement s'étend (par récurrence) à un nombre quelconque de points matériels, et en passant à la limite continue à un solide.

Espace 11

La quantité de mouvement d'un solide est également appelée sa **résultante cinétique**.

> ***Remarque :*** *La quantité de mouvement d'un point matériel (et les conditions initiales) caractérisent complètement son mouvement, mais ce n'est pas le cas pour un solide.*
>
> Espace 12
>
> *L'information « manquante » est portée par le vecteur moment cinétique, que nous introduirons dans un chapitre ultérieur.*

## II.2 - Démonstration du théorème

**Rappel :** le principe fondamental de la dynamique s'applique à un *point matériel* en mouvement par rapport à un référentiel *galiléen*.

⇝ le théorème de la résultante cinétique le généralise au cas d'un solide.

- **Cas d'un système de deux points matériels**

Raisonnons sur un système $\mathcal{S}$ constitué de deux points matériels indicés 1 et 2. Ces deux points exercent l'un sur l'autre des forces $\vec{f}_{1\to2}$ et $\vec{f}_{2\to1}$.

Espace 13

D'autres opérateurs, indicés $i \geq 3$, exercent des forces $\vec{f}_{i\to1}$ et $\vec{f}_{i\to2}$ sur ces deux points.

*Espace 14*

- **Généralisation : théorème de la résultante cinétique ou loi de la quantité de mouvement**

Les variations de quantité de mouvement d'un solide sont dues aux forces extérieures qu'il subit.
Pour un solide $S$ en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \overrightarrow{f}_{\text{ext}}\,.$$

Comme $\overrightarrow{p}_S$ n'est reliée qu'à la vitesse du centre de masse, le TRC ne permet de déterminer que les équations horaires du mouvement de $G$, mais n'apporte pas d'information sur les changements d'orientation du solide au cours du mouvement.

> ***Remarque :*** *Le TRC s'utilise dans les deux sens : si toutes les forces sont connues, il permet d'en déduire le mouvement de $G$, et si le mouvement de $G$ est connu il permet d'en déduire les forces subies par le solide.*

# III - Liaisons entre solides

## III.1 - Des forces dont l'effet est connu mais sans loi de force

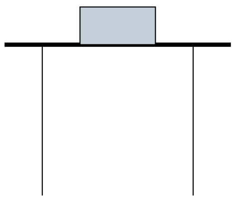
Toutes les forces que nous avons rencontrées jusqu'à présent sont décrites par des lois de force, mais leur effet sur le mouvement n'est connu que qualitativement.

⇝ ce n'est en fait pas général : dans le cas de mouvements contraints, on connaît « parfaitement » la contrainte, mais « pas du tout » la force.

Un mouvement est dit **contraint** lorsqu'il existe une **liaison** (au sens vu en SI) entre le système d'intérêt et une autre partie du dispositif.

- **Exemple**

Considérons une boîte posée sur une table.



Bilan des forces :

*Espace 15*

Application du TRC à l'équilibre :

Espace 16

Supposons maintenant qu'on appuie sur la boîte en exerçant une force $\vec{F}$ verticale. Elle reste toujours immobile :

- **Généralisation**

Espace 17

Conséquence : une loi de force applicable en toute circonstance ne peut pas exister.

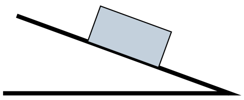
- **Condition d'existence de la liaison**

Si la force $\vec{F}$ est dirigée vers le haut, que devient la force quand la boîte quitte la table ?

Espace 18

⇝ très utile en pratique.

## III.2 - Exemple important : lois de Coulomb du contact solide



La force de réaction $\vec{R}$ exercée par un support sur un solide se décompose en deux composantes :

$$\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N} + \vec{R}_\mathrm{T}$$

Composante normale $\vec{R}_\mathrm{N}$ :

Espace 19

Composante tangentielle $\vec{R}_\mathrm{T}$ :



Étienne Thibierge, 22 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

Espace 20

Les deux composantes $\overrightarrow{R}_\mathrm{N}$ et $\overrightarrow{R}_\mathrm{T}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, et elles dépendent du mouvement relatif entre le solide et le support. Les lois qui les relient sont appelées **lois de Coulomb** du contact solide.

- s'il y a glissement des solides l'un sur l'autre, alors leurs normes sont proportionnelles,

$$||\overrightarrow{R}_\mathrm{T}|| = \mu_\mathrm{d}||\overrightarrow{R}_\mathrm{N}||\,,$$

  où $\mu_\mathrm{d}$ est un coefficient phénoménologique, dépendant notamment des matériaux et de leur état de surface, appelé **coefficient de frottement dynamique** ;
- s'il n'y a pas de glissement, alors leurs normes vérifient l'inégalité

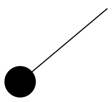
$$||\overrightarrow{R}_\mathrm{T}|| \leq \mu_\mathrm{s}||\overrightarrow{R}_\mathrm{N}||\,,$$

  où $\mu_\mathrm{s}$ est un coefficient phénoménologique, dépendant notamment des matériaux et de leur état de surface, appelé **coefficient de frottement statique**.

On constate que la liaison est mieux connue dans le cas du non-glissement (la vitesse de glissement y est nulle, alors qu'elle est quelconque dans le cas du glissement) mais que la force de contact est en contrepartie moins bien connue (inégalité sur les normes contre une égalité dans le cas du glissement).

> ***Remarque :*** *Ces lois ne sont pas à connaître, elles seront rappelées par un énoncé si nécessaire.*

## III.3 - Exemple : solide attaché à un fil tendu



Espace 21

La force s'annule dès lors que le fil n'est plus tendu : il y a rupture de la liaison.

Pour un fil de masse négligeable, on peut montrer que les forces aux deux extrémités sont de même norme mais de sens opposé. De façon plus générale, si le fil est tendu mais courbé (p.ex. s'il passe sur une poulie ou un clou), la force change de direction mais pas de norme : sur la figure ci-dessous, $||\overrightarrow{T}|| = ||\overrightarrow{T'}||$. On dit que le fil transmet parfaitement les efforts.