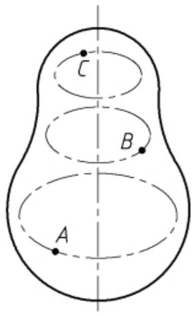
Mouvements à trajectoires circulaires

I.4 - Généralisation : coordonnées cylindriques et sphériques

Les coordonnées polaires définissent un repérage *du plan*, mais il est souvent utile de généraliser au cas plus général d'un repérage *de l'espace*. On a alors deux possibilités pour la troisième coordonnée : une longueur ou un angle.

a) Coordonnées cylindriques : solide en rotation autour d'un axe fixe

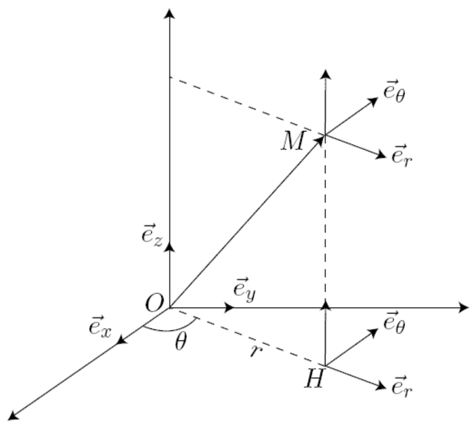
La situation typique où les coordonnées cylindriques s'imposent est celle du repérage d'un point appartenant à un solide en rotation autour d'un axe fixe.



Idée :

Espace 1

⇝ cette idée permet de définir les **coordonnées cylindriques**.



Coordonnées cylindriques de M : (r, θ, z)

Attention !

Espace 2

Vecteur position :

Espace 3

La base cylindrique est également une **base locale**, c'est-à-dire qui suit M au cours de son mouvement, mais le vecteur $\vec{e}_z$ est fixe, ce qui simplifie les calculs.

Espace 4

Les vecteurs cinématiques en coordonnées cylindriques sont donnés par

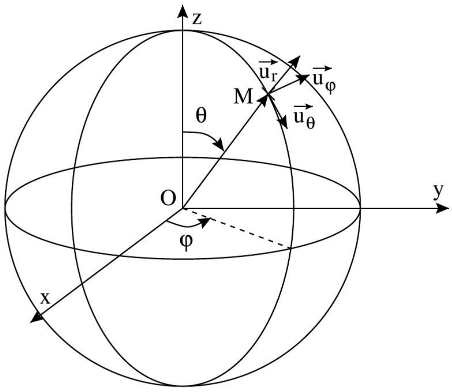
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{d}M} &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \\
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

> ***Remarque :*** *Qualitativement, comme $\vec{e}_z$ est fixe, il ne « se mélange pas » avec les autres vecteurs dans les calculs.*

b) Coordonnées sphériques : objet à la surface de la Terre

La situation typique où les coordonnées sphériques s'imposent est celle du repérage d'un objet à la « surface » de la Terre, type bateau ou satellite.

$\rightsquigarrow$ la troisième coordonnée est un angle.



Coordonnées sphériques de M : (r, θ, φ)
θ est appelé **colatitude**, φ est appelé **azimuth**.

Plutôt que la colatitude θ, on utilise traditionnellement en mécanique terrestre la latitude λ définie comme l'angle $\widehat{HOM}$, mesurée depuis un rayon équatorial et non pas depuis l'axe des pôles. Ainsi, $\lambda = \theta + \pi/2$.

Les vecteurs vitesse et accélération sont dans le cas général définis par des formules trop complexes pour être intéressantes en pratique. Néanmoins, nous les rencontrerons éventuellement dans des cas où le mouvement possède des caractéristiques telles que les expressions se simplifient grandement.

III.3 - Résolution numérique

a) Équation différentielle adimensionnée

L'équation différentielle du pendule simple

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0$$

fait apparaître une pulsation caractéristique ω_0, ou autrement dit un temps caractéristique qui donne l'ordre de grandeur de la période. Comme on ne souhaite pas étudier l'influence de ce temps caractéristique mais seulement celle de la non-linéarité du sinus, on choisit d'écrire l'équation différentielle sous une forme adimensionnée.

Pour ce faire, on introduit une variable réduite $t^\star = \omega_0 t$ sans dimension. Alors,

$$\theta(t) = \theta(t^\star/\omega_0) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t^\star} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^{\star 2}}$$

L'équation différentielle du pendule simple s'écrit finalement

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^{\star 2}} + \sin\theta = 0\,.$$

b) Étude numérique

La résolution numérique peut être menée par la méthode d'Euler, mais on choisit plutôt ici la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`. Simple à mettre en œuvre, rapide à exécuter, c'est l'outil Python par excellence pour résoudre une telle équation différentielle.

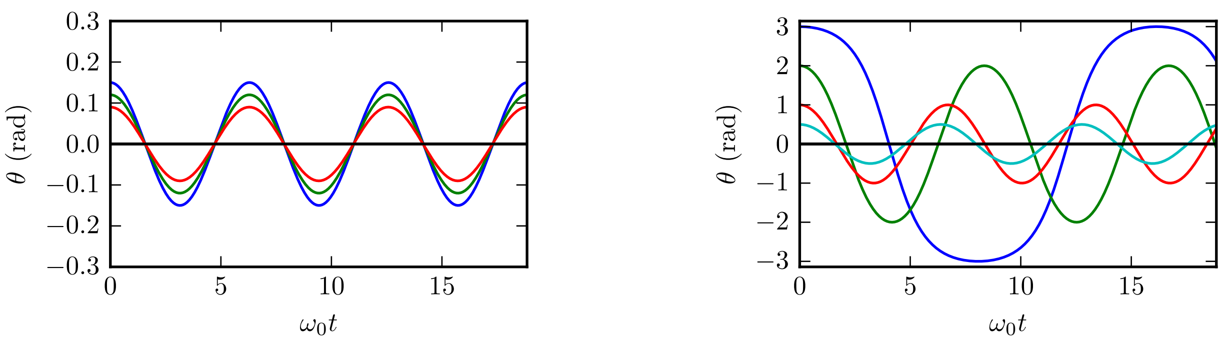


Figure 1 – Oscillations d'un pendule simple pour différentes valeurs de l'angle initial. Attention, l'échelle est différente sur les deux figures. Version couleur sur le site de la classe.

La période des petites oscillations ne dépend pas de leur amplitude, au contraire de la période des grandes oscillations. Cette propriété porte le nom d'**isochronisme des petites oscillations**. La transition entre « petites » et « grandes » oscillations a lieu pour $\theta \simeq 25°$.

Remarque : *Une approche analytique bien trop complexe pour être détaillée ici*[1] *permet d'établir que la période T des oscillations dépend de leur amplitude θ_m*

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_m)}} \simeq \frac{4T_0}{\left(1 + \sqrt{\cos\dfrac{\theta_m}{2}}\right)^2}$$

où $T_0 = 2\pi/\omega_0$ serait la période propre si l'oscillateur était harmonique. L'intégrale, appelée « intégrale elliptique de première espèce », ne peut pas s'exprimer de façon exacte à partir de fonctions simples : seule une approximation peut en être donnée. On constate que $T \to T_0$ lorsque l'amplitude $\theta_m \to 0$.

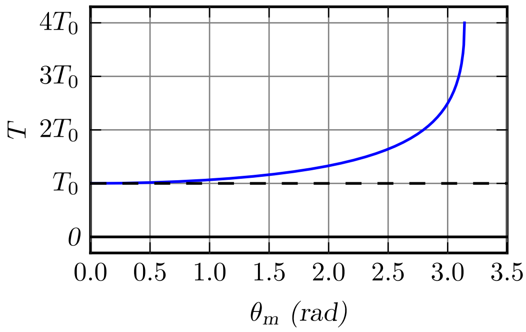


Figure 2 – Période des oscillations du pendule simple en fonction de leur amplitude.

1. Voir ici : `http://femto-physique.fr/mecanique/pdf/periode_pendule.pdf`