Énergie mécanique

Exercices

Exercice 1 : Skieur [♦◇◇]

Un skieur pesant 70 kg descend une piste rectiligne longue de 50 m et inclinée d'un angle $\alpha = 25°$ par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la piste, qui se décompose en une composante normale $\vec{N}$ perpendiculaire à la piste et une composante tangentielle $\vec{T}$ colinéaire et de sens opposé à la vitesse. Les normes de ces deux composantes sont liées entre elles par la loi de Coulomb, $T = \mu N$, avec $\mu = 0{,}1$.

1 - Faire un schéma de la situation représentant les différentes forces.

2 - Exprimer et calculer le travail des trois forces $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ au cours de la descente.

3 - En admettant que le skieur part du haut de la piste sans vitesse initiale, appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer sa vitesse en bas de la piste.

Exercice 2 : Marsupilami [♦◇◇]

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin. Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.

On note $\ell_0 = 2$ m la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est $\ell_\mathrm{m} = 50$ cm. On supposera que le Marsupilami pèse 50 kg et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.

1 - Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10$ m.

2 - Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

Exercice 3 : Piégeage d'un électron [♦◇◇]

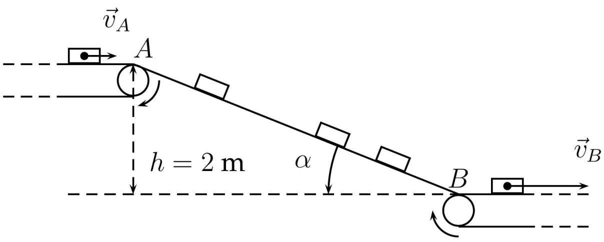
Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle y vaut

$$E_\mathrm{p}(z) = \frac{e\,V_0}{2\,d^2} z^2$$

où $V_0 = 5{,}0$ V et $d = 6{,}0$ mm.

En négligeant tout phénomène dissipatif, c'est-à-dire en supposant l'énergie mécanique conservée, calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Exercice 4 : Convoyeur de colis [♦♦◇]

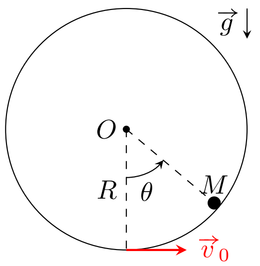


Étudions un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, puis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Déterminer l'expression puis la valeur de α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est-à-dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

Donnée : suivant les lois de Coulomb du frottement solide, lors du glissement, les forces exercées par le tapis sur le colis sont reliées par $T = fN$ où T et N sont respectivement les normes de la réaction tangentielle et normale du support et $f = 0{,}4$ est le coefficient de frottement.

Exercice 5 : Mouvement sur un cercle [♦♦◊]



Une bille M de masse m peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un support circulaire vertical de rayon R. On la lance avec la vitesse horizontale $\vec{v}_0$ au point le plus bas du cercle.

1 - En utilisant un théorème énergétique, établir l'équation du mouvement de M.

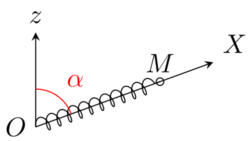
2 - Montrer que la norme de la force de réaction du support circulaire vaut

$$N = m\left[\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2)\right]$$

3 - Montrer que la bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse $v_{\min}$ à déterminer.

4 - Supposons $v_0 < v_{\min}$. Déterminer l'angle auquel la bille quitte le support et tombe.

Exercice 6 : Tige avec ressort [♦♦◊]



On considère une tige fixe dans un plan vertical xOz, faisant un angle α avec l'axe Oz. Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et contraint de se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Cet anneau est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$.

1 - Quelles sont les forces appliquées à l'anneau ? En déduire son énergie potentielle E_p en fonction de X et de α.

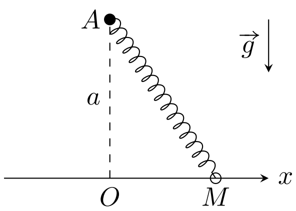
2 - Pourquoi est-il physiquement nécessaire de supposer $mg\cos\alpha < k\ell_0$? Étudier la fonction $E_\text{p}(X)$ et tracer son allure.

3 - À partir du graphique, décrire le mouvement issu des conditions initiales $X(0) = \ell_0$ et $\dot{X}(0) = V_0$. Justifier notamment qu'il s'agit d'un mouvement périodique.

4 - Établir l'équation du mouvement par un théorème énergétique et en déduire la période du mouvement.

Exercice 7 : Oscillateur de Landau [♦♦◊]

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.



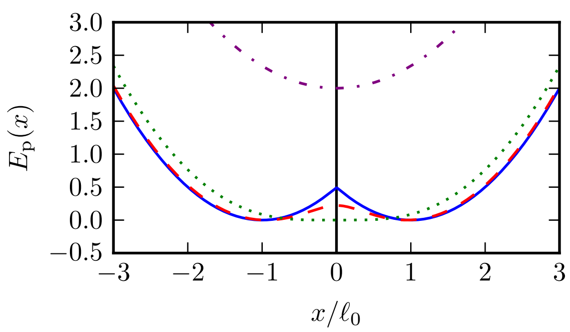
Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est notée $AO = a$.

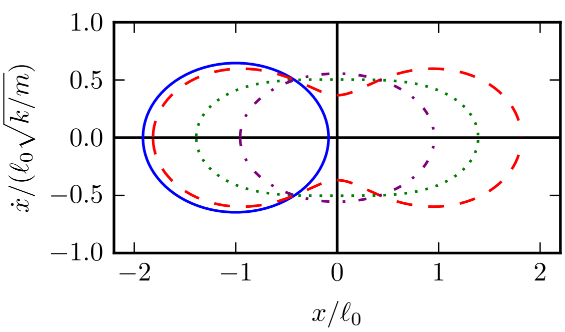
1 - Exprimer l'énergie potentielle totale $E_\text{p}(x)$.

2 - La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous (version couleur sur le site de la classe) pour quatre valeurs de a : $a_1 = \ell_0/10$, $a_2 = \ell_0/3$, $a_3 = \ell_0$ et $a_4 = 3\ell_0$. En raisonnant qualitativement sur les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.

3 - Pour chaque valeur de a, analyser en fonction des conditions initiales le mouvement possible de l'anneau.

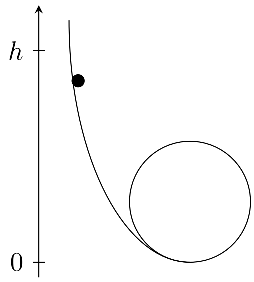
4 - Pour les valeurs de a précédentes, l'anneau est lâché avec les mêmes conditions initiales. Sa vitesse et sa position sont enregistrées au cours du temps, ce qui donne les trajectoires de phase de la figure ci-dessous. Déterminer la condition initiale et affecter chaque trajectoire de phase à la valeur de a qui lui correspond.





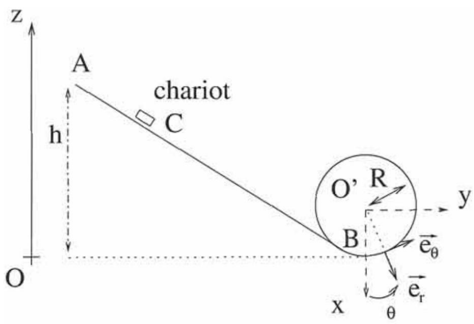
Annales de concours

Exercice 8 : Balle dans un tonneau [oral banque PT, ♦♦♢]



Sur Terre, on lâche une balle de masse m considérée ponctuelle sur une rampe depuis une hauteur h. Elle achève sa course dans un tonneau circulaire. Établir une condition nécessaire sur la hauteur h pour que la balle fasse un tour complet dans le tonneau sans décoller.

Exercice 9 : Chariot de parc d'attraction [oral banque PT, ♦♦♢]



On étudie numériquement la trajectoire d'un chariot de parc d'attraction, de masse $m = 10$ tonnes. Ce chariot part du point A, descend le long du plan incliné et entre ensuite dans un looping haut de 40 m, où l'on suppose qu'il peut parcourir plusieurs tours.

Les courbes de la figure 2 représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$, de l'énergie totale $\mathcal{E}_m$ et l'évolution de la réaction normale R_n du looping sur le chariot.

Donnée : $g \simeq 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 - Associer à chaque courbe la grandeur représentée. La simulation prend-elle en compte des frottements et autres sources de dissipation ?

2 - Calculer la hauteur initiale h et la vitesse initiale V_0 du chariot, et la vitesse maximale $V_{\max}$ qu'il atteint.

3 - À quelle date le chariot quitte-t-il le looping ?

4 - Combien de tours entiers effectue le chariot avant de se décoller du looping ?

5 - Quelle hauteur initiale faudrait-il donner au chariot afin qu'il ne se décolle pas ?

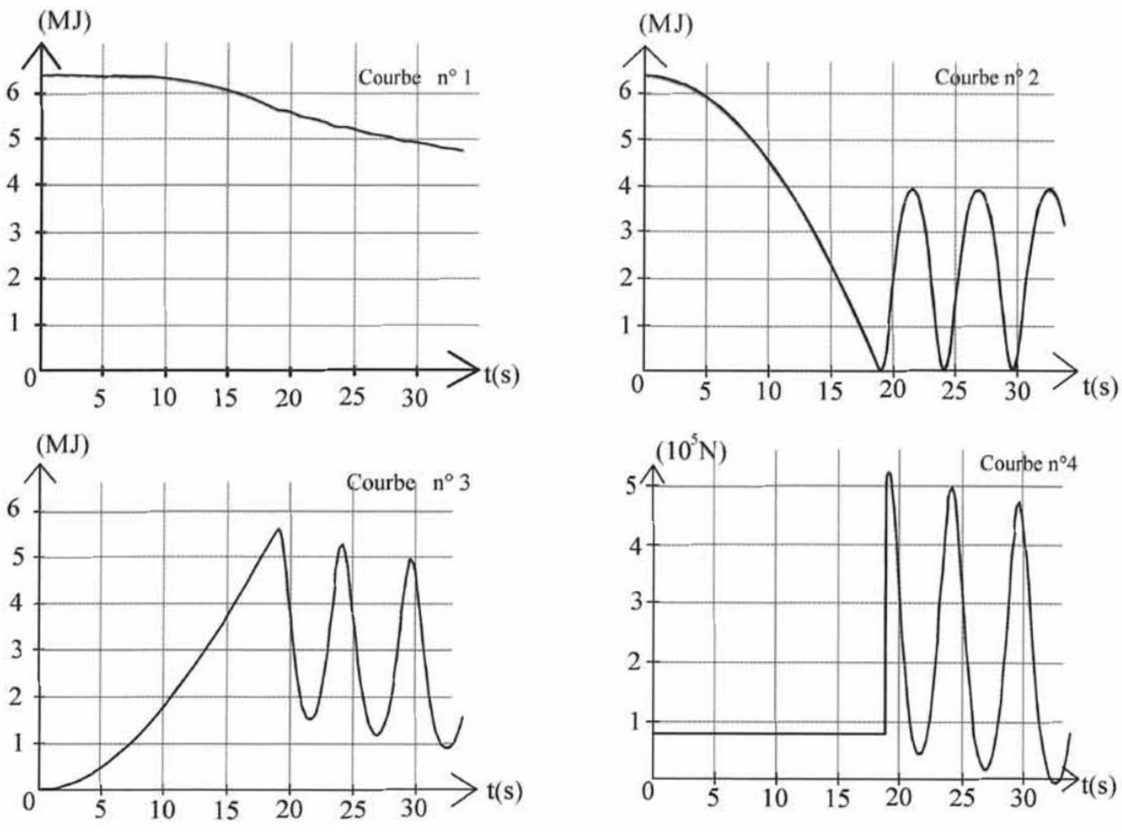


Figure 2 – Simulation numérique du mouvement d'un chariot.

Résolution de problème

Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 10 : Remonte-pente [oral CCP, ♦♦♢]

Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent pour remonter. Déterminer la puissance du moteur qui entraîne le câble.

Données :

- ▷ Longueur totale du câble : 200 m ;
- ▷ Distance séparant deux skieurs : 5 m ;
- ▷ Dénivelé entre les extrémités du câble : 5 m ;
- ▷ Vitesse du câble : $5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
- ▷ Lorsque le ski glisse sur la neige, la réaction tangentielle $\vec{R}_\mathrm{T}$ du sol sur le ski est reliée à la réaction normale $\vec{R}_\mathrm{N}$ par $||\vec{R}_\mathrm{T}|| = f||\vec{R}_\mathrm{N}||$ avec $f \simeq 0{,}1$.

Énergie mécanique

Exercices

Exercice 1 : Skieur

1 Schéma figure 3. Compte tenu de l'orientation des forces, il est plus judicieux d'utiliser un repérage incliné le long de la pente.

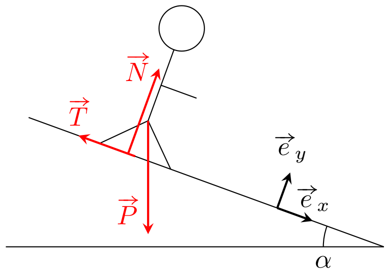


Figure 3 – **Schéma du skieur en descente.**

2 Notons $x = 0$ et $x = L$ les deux extrémités de la piste. Le travail du poids du skieur se calcule simplement,

$$W(\vec{P}) = \int_0^L \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_0^L m\vec{g} \cdot \mathrm{d}x\,\vec{e}_x = mg\sin\alpha \int_0^L \mathrm{d}x \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{W(\vec{P}) = mg\sin\alpha L}$$

Comme la force de réaction normale est perpendiculaire à la pente (donc à la trajectoire), alors elle ne travaille pas, donc

$$W(\vec{N}) = 0$$

Calculons enfin le travail de la force de réaction tangentielle $\vec{T}$. La seule chose que l'on connaisse à son sujet est le lien entre sa norme et celle de N. Comme le mouvement du skieur demeure sur la piste sans s'enfoncer, alors

$$P_y + N_y = 0 \qquad \text{soit} \qquad N_y = N = mg\cos\alpha \qquad \text{d'où} \qquad T = \mu mg\cos\alpha$$

Alors,

$$W(\vec{T}) = \int_0^L \vec{T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\int_0^L T\mathrm{d}x = -\mu mg\cos\alpha \int_0^L \mathrm{d}x \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{W(\vec{T}) = -\mu mg\cos\alpha L}$$

3 Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au skieur entre son point de départ D et son point d'arrivée A,

$$E_\mathrm{c}(A) - E_\mathrm{c}(D) = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) = mgL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Comme la vitesse initiale du skieur est nulle, et en notant c sa vitesse d'arrivée, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

et finalement

$$\boxed{v = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 65\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

Exercice 2 : Marsupilami

1 Si l'on néglige les frottements, alors l'énergie mécanique du Marsupilami

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{pp} + E_\mathrm{pe} + E_\mathrm{c}$$

est une constante du mouvement. Son énergie potentielle compte une contribution de pesanteur E_pp et une contribution élastique E_pe. Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique,

$$E_\mathrm{m} = 0 + \frac{1}{2}k(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2 + 0$$

> *Il serait également raisonnable d'inclure une contribution d'énergie potentielle de pesanteur $mg\ell_m$ à l'énergie mécanique, mais cela ne modifierait pas beaucoup le résultat final.*

Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur,

$$E_\mathrm{m} = mgh + 0 + 0\,.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}k(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2 = mgh \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{2mgh}{(\ell_\mathrm{m} - \ell_0)^2} = 4{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.}$$

$\boxed{2}$ Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur ℓ_0 au dessus du sol avec une vitesse v. Son énergie mécanique vaut alors

$$E_\mathrm{m} = mg\ell_0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2\,.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$mgh = mg\ell_0 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2mg(h-\ell_0)} = 88\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

Exercice 3 : Piégeage d'un électron

L'énergie mécanique est simplement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{e\,V_0}{d^2}z^2\,.$$

Comme elle est supposée conservée, alors sa dérivée temporelle est nulle, d'où

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{d^2}z\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Si l'électron oscille dans le piège, alors sa vitesse n'est pas constamment nulle. Pour calculer la fréquence des oscillations, on peut donc diviser par $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Diviser en outre par m conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\,V_0}{m\,d^2}\,z = 0\,.$$

L'équation différentielle que vérifie le mouvement de l'électron est donc celle d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence propre vaut

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\,V_0}{m\,d^2}} = 25\cdot 10^6\,\mathrm{Hz} = 25\,\mathrm{MHz}}$$

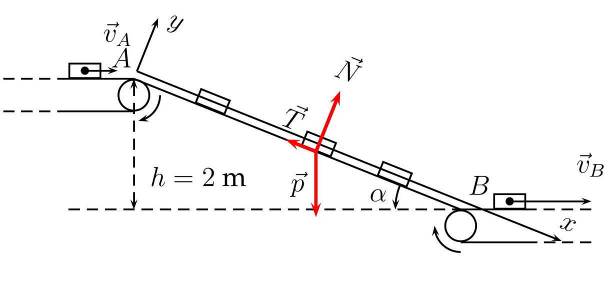
Exercice 4 : Convoyeur de colis

Comme on cherche uniquement les vitesses en deux points (A et B), la version intégrale du théorème de l'énergie cinétique est la méthode à privilégier.

On raisonne sur un paquet de masse m, en mouvement par rapport au référentiel terrestre (celui du centre de tri), galiléen en très bonne approximation. Calculons les travaux des forces s'exerçant sur le paquet.

Le paquet subit bien sûr son poids $\overrightarrow{P}$, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur. Sur la trajectoire AB où le colis subit une dénivellation h, le poids et moteur et son travail vaut

$$W_{AB}(\overrightarrow{P}) = +mgh > 0$$



Il subit également la réaction du plan incliné, $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$, non conservative. Le travail de $\overrightarrow{N}$ est nul car $\overrightarrow{N}$ est normale au déplacement. Pour calculer le travail de $\overrightarrow{T}$, il nous faut d'abord déterminer son expression. En utilisant le repérage ci-contre, on sait qu'elle s'écrit

$$\overrightarrow{T} = -T\,\vec{e}_x$$

mais il faut calculer sa norme, ce qui ne peut se faire que via la norme de $\overrightarrow{N}$ et la loi de Coulomb.

Par projection de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe Oy,

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha = 0$$

car le mouvement se fait sur le plan incliné. On en déduit donc

$$N = mg\cos\alpha \qquad \text{donc} \qquad T = fmg\cos\alpha$$

et ainsi

$$W_{AB}(\overrightarrow{T}) = \int_{AB} \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -fmg\cos\alpha \int_{AB} \mathrm{d}x = -fmg\cos\alpha L$$

où L est la longueur totale du plan incliné. De la trigonométrie de base donne $\sin\alpha = h/L$ soit $L = h/\sin\alpha$. Finalement,

$$W_{AB}(\overrightarrow{T}) = -fmg\cos\alpha \times \frac{h}{\sin\alpha} = -fmgh\,\mathrm{cotan}\,\alpha\,.$$

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - fmgh\,\mathrm{cotan}\,\alpha$$

ce qui donne

$$\mathrm{cotan}\,\alpha = \frac{-mv_B^2 + mv_A^2 + 2mgh}{2fmgh}$$

ce qui se simplifie en

$$\mathrm{cotan}\,\alpha = \frac{v_A^2 - v_\mathrm{B}^2 + 2gh}{2fgh} \qquad \text{ou encore} \qquad \tan\alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_\mathrm{B}^2 + 2gh}$$

et conduit au final à

$$\tan\alpha = 0{,}4 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = 22°\,.}$$

Exercice 5 : Mouvement sur un cercle

Le système étudié est la bille, modélisée par un point matériel M de masse m, en évolution dans le référentiel terrestre, galiléen.

$\boxed{1}$ Le point M est soumis à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la réaction du support, qui ne travaille pas : puisqu'il n'y a pas de frottement, seule la composante normale est à prendre en compte. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_\mathrm{pp} = mgz_M + \mathrm{cte} = -mgR\cos\theta + \mathrm{cte}$$

en introduisant de façon très temporaire un axe z vertical ascendant d'origine O. Choisissons dès maintenant la constante en prenant $E_\mathrm{pp} = 0$ en bas du cercle, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$, ce qui donne

$$E_\mathrm{pp} = -mgR\cos\theta + mgR = mgR(1 - \cos\theta)$$

De plus, comme le mouvement est circulaire, on connaît la vitesse de M d'où on déduit son énergie cinétique

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

L'énergie mécanique de la bille est alors une constante du mouvement, qui vaut

$$E_\mathrm{m} = -mgR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = mgR\,\dot{\theta}\sin\theta + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

Comme $\dot{\theta}$ ne peut pas être constamment nul (cela signifierait que la vitesse est toujours nulle, or on sait qu'à $t = 0$ la vitesse de la bille n'est pas nulle), on peut simplifier pour obtenir

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation d'un pendule simple.

2 Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

On utilise ici évidemment le répérage polaire de centre O avec $r = R$ constant, d'où

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$

car $\vec{N}$ est orientée selon $-\vec{u}_r$. L'équation projetée sur $\vec{u}_\theta$ donne l'équation du mouvement, déterminée énergétiquement, alors que l'équation projetée sur $\vec{u}_r$ donne accès à la norme N,

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta\,.$$

Or on a montré précédemment que

$$E_\mathrm{m} = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 \qquad \text{d'où} \qquad mR\dot{\theta}^2 = \frac{2}{R}E_\mathrm{m} + 2mg(\cos\theta - 1)$$

Ainsi,

$$N = 2RE_\mathrm{m} + mg(3\cos\theta - 2)\,.$$

Enfin, comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, sa valeur est toujours égale à sa valeur initiale. Comme on a **déjà** choisi la référence d'énergie potentielle en bas du cercle, alors

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c}(0) + E_\mathrm{p}(0) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0$$

> *Il est absolument indispensable de garder la même référence d'énergie potentielle tout au long de l'exercice. En effet, E_m est définie à une constante additive près, ce qui n'est pas le cas de la force. Changer malencontreusement de constante en cours de route ferait apparaître la différence entre les constantes dans l'expression de la force, ce qui n'a aucun sens.*

Cette expression donne finalement le résultat escompté,

$$\boxed{N = m\left[\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2)\right]}$$

3 La norme N doit par définition rester positive tout au long du mouvement : si elle s'annule, c'est que le contact entre le support et la bille est rompu. Le premier terme entre crochets est toujours positif. En revanche, le second terme peut prendre des valeurs négatives. La valeur la plus petite qu'il puisse atteindre, lorsque $\cos\theta = -1$, est $-5g$. Ainsi, la bille ne décolle pas du support si

$$\frac{{v_0}^2}{R} - 5g > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_0 > v_\mathrm{min} = \sqrt{5gR}}$$

4 Supposons $v_0 < v_\mathrm{min}$, et cherchons l'angle θ pour lequel la norme de N s'annule,

$$\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$3g\cos\theta = 2g - \frac{{v_0}^2}{R}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}\right)}$$

Exercice 6 : Tige avec ressort

1 L'anneau est soumis à son poids, force conservative dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la force de rappel du ressort, force conservative dérivant de l'énergie potentielle élastique. Il est également soumis à la force de réaction de la tige, mais cette comme les frottements sont négligés cette force ne travaille pas. Ainsi, l'énergie potentielle de l'anneau vaut

$$E_\mathrm{p} = mgz + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2 + \mathrm{cte} \qquad \text{soit} \qquad E_\mathrm{p} = mgX\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2 + \mathrm{cte}\,.$$

Pour fixer les idées, on peut définir la constante en posant par exemple $E_\mathrm{p} = 0$ lorsque $X = \ell_0$, ce qui donne cte $= -mg\ell_0\cos\alpha$, d'où

$$\boxed{E_\mathrm{p} = mg(X-\ell_0)\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2\,.}$$

2 Si $mg\cos\alpha > k\ell_0$, cela voudrait dire que le poids est suffisamment important pour « retourner » le ressort et faire passer M du côté $X < 0$. Le modèle du ressort idéal cesserait donc d'être valide bien avant.

Commençons l'étude par calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}X} = mg\cos\alpha + k(X-\ell_0)\,.$$

Cette dérivée est nulle en $X = \ell_0 - mg\cos\alpha/k > 0$, et on peut facilement s'assurer qu'il s'agit d'un minimum, par exemple en étudiant les limites $X \to \pm\infty$ du polynôme du second degré définissant E_p. L'énergie potentielle minimale vaut alors

$$E_\mathrm{p,min} = -\frac{(mg\cos\alpha)^2}{2k}\,,$$

ce qui conduit au tracé figure 4.

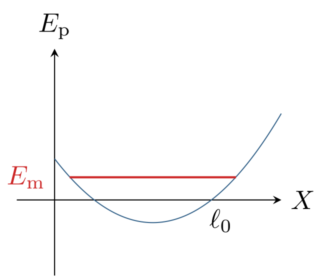


Figure 4 – Graphe d'énergie potentielle.

3 Comme l'énergie cinétique est positive ou nulle, le mouvement a lieu dans les zones telles que $E_\mathrm{m} \geq E_\mathrm{p}$. La figure 4 indique $E_\mathrm{m} > 0$ car la vitesse initiale est non nulle et ℓ_0 est la référence d'énergie potentielle. Par conséquent, tout au long du mouvement,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m{V_0}^2$$

Les points extrêmes correspondent à une énergie cinétique nulle, c'est-à-dire $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p}(X_\mathrm{m})$, soit

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2 = mg(X_\mathrm{m}-\ell_0)\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X_\mathrm{m}-\ell_0)^2$$

Comme la trajectoire est bornée, alors le mouvement est périodique. De plus, comme le puits d'énergie potentielle dans lequel il a lieu est parabolique, on s'attend à ce qu'il soit harmonique.

4 L'énergie mécanique de l'anneau vaut

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mg(X-\ell_0)\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X-\ell_0)^2$$

et comme elle est constante alors

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0 = m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X}\cos\alpha + k\dot{X}(X-\ell_0)\,.$$

Comme il y a mouvement $\dot{X}$ n'est pas nulle à tout instant, ce qui permet d'aboutir à l'équation du mouvement

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}\ell_0 - g\cos\alpha\,.}$$

On reconnaît comme attendu une équation d'oscillateur harmonique, d'où on déduit la période des oscillations

$$T_0 = \frac{1}{2\pi\omega_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Exercice 7 : Oscillateur de Landau

1 Comme l'anneau est contraint de se déplacer sur une ligne horizontale, son énergie potentielle de pesanteur est constante. Ainsi, la seule contribution à l'énergie potentielle est d'origine élastique,

$$E_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2\,.$$

La longueur AM s'exprime à partir du théorème de Pythagore,

$$AM^2 = a^2 + x^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2+x^2} - \ell_0)^2\,.}$$

2 Qualitativement, il est assez simple de comprendre pourquoi certaines courbes font apparaître deux minima et d'autre un seul. Si $a < \ell_0$, alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que $AM = \ell_0$. Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle. Au contraire, si $a > \ell_0$, le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle.

> *Ce raisonnement qualitatif se retrouve bien sûr sur l'expression mathématique de E_p.*

Ainsi on peut identifier **la courbe en pointillés violets au cas $a_4 = 3\ell_0$**. La courbe en points verts ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : **elle correspond au cas $a_3 = \ell_0$**. Enfin, il reste à identifier les deux dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en $x = 0$. Elle est plus élevée sur la courbe bleue que sur la courbe rouge, signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que **la courbe bleue est celle du cas $a_1 = \ell_0/10$ alors que la courbe rouge correspond à $a_2 = \ell_0/3$**.

3 Quelles que soient les conditions initiales, le mouvement est borné car E_p diverge en $\pm\infty$, et il est donc périodique. Dans le cas $a \leq \ell_0$, si les conditions initiales sont telles que $E_\mathrm{m} < E_\mathrm{p}(x = 0)$, alors le mouvement est restreint à un côté $x < 0$ ou $x > 0$ car l'anneau n'a pas assez d'énergie pour franchir la barrière de potentiel en $x = 0$. Si les conditions intiales sont en revanche telles que $E_\mathrm{m} > E_\mathrm{p}(x{=}0)$, le mouvement a lieu de part et d'autre de la barrière, et il est symétrique car le profil d'énergie potentielle l'est. C'est également le cas si $a > \ell_0$, et ce quelles que soient les conditions initiales.

4 La condition initiale est très simple à déterminer : c'est le seul point commun à toutes les trajectoires de phase. Compte tenu de la symétrie des portraits de phase et des profils d'énergie potentielle, seule la norme de la vitesse peut être déterminée. On trouve

$$x_0 = 0{,}4\ell_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_0 = 0{,}5\ell_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Seule la trajectoire de phase représentée en bleu n'est pas symétrique par rapport à $x = 0$. Elle correspond donc au cas où la barrière de potentiel centrale est la plus élevée, donc **le cas $a_1 = \ell_0/10$.** La trajectoire de phase représentée en rouge montre une réduction de vitesse en $x = 0$: elle correspond donc au cas où il y a une barrière de potentiel, mais moins élevée, c'est-à-dire **le cas $a_2 = \ell_0/3$.** Enfin, la trajectoire de phase verte est plus aplatie que la trajectoire de phase violette. Cet aplatissement se retrouve dans les courbes d'énergie potentielle : la courbe verte correspond **au cas $a_3 = \ell_0$** et la courbe violette **au cas $a_4 = 3\ell_0$**.

Annales de concours

Exercice 8 : Balle dans un tonneau [oral banque PT]

C'est la situation classique où il faut déterminer l'annulation d'une force de contact. Le système est la bille dans le référentiel terrestre.

Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

On utilise ici évidemment le répérage polaire de centre celui du tonneau avec $r = R$ constant, d'où

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$

car $\vec{N}$ est orientée selon $-\vec{u}_r$, ce qui donne

$$N = m(g\cos\theta + R\dot{\theta}^2)$$

Méthode 1 : parfaitement adaptée à la question mais moins générale.

On reconnaît $R\dot{\theta}^2 = v^2/R$ avec v la vitesse de la balle. Ainsi,

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right)$$

Il faut que N soit toujours positive, sinon la force s'annule ce qui est synonyme de rupture de contact. Le cas le moins favorable se trouve en $\theta = \pi$ donc $\cos\theta = -1$. Calculons la vitesse en ce point, grâce à la conservation de l'énergie mécanique.

$$E_\mathrm{m} \underbrace{=}_{\mathrm{CI}} 0 + mgh \underbrace{=}_{\theta=\pi} \frac{1}{2}mv(\pi)^2 + mg\times 2R \qquad \text{d'où} \qquad v(\pi)^2 = 2g(h-2R)$$

et ainsi

$$N(\pi) = mg\left(-1 + 2\frac{h-2R}{R}\right).$$

On a donc $N > 0$ pour h tel que

$$2\frac{h-2R}{R} > 1 \qquad \text{soit} \qquad 2h - 4R > R \qquad \text{donc} \qquad \boxed{h > \frac{5}{2}R}$$

Méthode 2 : moins adaptée à la question mais plus générale.

Pour trouver $\dot{\theta}^2$ on utilise la conservation de l'énergie mécanique de la bille, qui est toujours égale à sa valeur initiale. Ainsi,

$$E_\mathrm{m} \underbrace{=}_{E_\mathrm{c}+E_\mathrm{pp}} \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) \underbrace{=}_{\mathrm{CI}} mgh$$

ce qui donne

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{2gh}{R} + 2g(\cos\theta - 1)$$

et en injectant dans l'expression de N on trouve

$$N = m\left(\frac{2gh}{R} + 3g\cos\theta - 2g\right)$$

Il faut que N soit toujours positive (sinon la force s'annule ce qui est synonyme de rupture de contact), donc

$$\frac{2gh}{R} - 3g - 2g > 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{2h}{R} > 5 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{h > \frac{5}{2}R\,.}$$

Exercice 9 : Chariot de parc d'attraction [oral banque PT]

$\boxed{1}$ ▷ Par simple lecture des unités, on déduit que **la courbe 4 correspond à la force de réaction R_n**.

▷ La courbe 1 est la seule courbe monotone, ce qui ne peut pas être le cas de l'énergie cinétique ni de l'énergie potentielle lorsque le chariot fait des tours complets de looping : **la courbe 1 représente l'énergie mécanique totale du chariot**. Comme elle est décroissante, cela signifie que **la simulation prend en compte des sources de dissipation**.

▷ La courbe 2 part d'un maximum et commence par décroître : ce n'est donc pas l'énergie cinétique, car le chariot accélère dans la pente. Cela est confirmé car elle atteint ensuite périodiquement la même valeur, à chaque tour accompli par le chariot. On en déduit que **la courbe 2 représente l'énergie potentielle du chariot**.

▷ Enfin, la courbe 3 part d'une valeur nulle qui commence par croître, puis présente des oscillations : **il s'agit de l'énergie cinétique** du chariot. Le fait que sa valeur maximale diminue à chaque tour est dû aux frottements.

$\boxed{2}$ À l'instant $t = 0$, $\mathcal{E}_{c,0} = \frac{1}{2} m {V_0}^2 = 0$ d'où on déduit directement

$$\boxed{V_0 = 0\,.}$$

À ce même instant initial, $\mathcal{E}_{p,0} = 6{,}5 \cdot 10^6$ J d'où on déduit

$$\boxed{h = \frac{\mathcal{E}_{p,0}}{mg} = 65\,\mathrm{m}\,.}$$

Enfin, la valeur maximale d'énergie cinétique vaut $\mathcal{E}_{c,max} = 5{,}5 \cdot 10^6$ J d'où

$$\boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{c,max}}{m}} = 33\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.}$$

$\boxed{3}$ Le chariot quitte le looping lorsque la force de réaction exercée par le looping sur le chariot s'annule, c'est-à-dire **au bout de 33 s environ**.

$\boxed{4}$ Avant que le chariot ne décolle, la courbe d'énergie potentielle atteint deux fois son maximum avant de revenir à la valeur nulle. On en déduit qu'**il parcourt deux tours complets avant de décoller**.

$\boxed{5}$ Appliquons le théorème de la résultante cinétique au chariot en mouvement dans le référentiel terrestre.

- **Bilan des forces :**

▷ Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta$;

▷ Réaction normale du rail $\overrightarrow{R}_n = -R_n\,\overrightarrow{e}_r$;

▷ Force de frottements $\overrightarrow{F}$, dont on ne sait rien mais que l'on peut supposer colinéaire à la vitesse, c'est-à-dire $\overrightarrow{F} = -F\,\overrightarrow{e}_\theta$.

- **Application du TRC :** Comme le mouvement est circulaire, alors

$$\overrightarrow{O'M} = R\,\overrightarrow{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{v} = R\dot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{a} = -R\dot\theta^2\,\overrightarrow{e}_r + R\ddot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\,.$$

Le TRC s'écrit ainsi

$$\begin{cases} -mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta - R_n \\ mR\ddot\theta = -mg\sin\theta - F \end{cases}$$

- **Condition de liaison :** Pour que la force de réaction soit bien de norme positive, il faut

$$g\cos\theta + R\dot\theta^2 > 0$$

et comme le cas le plus contraignant est celui où $\cos\theta = -1$, soit $\theta = \pi$, ce qui correspond au sommet du looping, on en déduit qu'il faut avoir

$$R\dot\theta^2 > g$$

Cela donne une borne inférieure sur l'énergie cinétique au sommet du looping,

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(R^2\dot\theta^2) > \frac{1}{2}mgR = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{J}\,,$$

car le looping est haut de 40 m donc son rayon mesure 20 m.

• **Conclusion :** Il me semble ensuite assez difficile de conclure avec les courbes données : on peut estimer qu'à l'instant où le chariot décolle il lui manque $\Delta\mathcal{E} = 0{,}1\,\mathrm{MJ}$ par rapport à la borne que l'on vient de déterminer. Pour combler ce manque, il faudrait un surplus de hauteur initiale

$$\boxed{\Delta h = \frac{\Delta\mathcal{E}}{mg} = 1\,\mathrm{m}\,.}$$

Cependant, compte tenu des frottements, le chariot ne manquerait pas de décoller au tour suivant ...

Résolution de problème

Exercice 10 : Remonte-pente [oral CCP]

La puissance du moteur doit être telle qu'elle puisse entraîner tous les skieurs. L'approche probablement la plus simple consiste donc à commencer par déterminer la puissance motrice nécessaire pour tirer un skieur de masse m à une vitesse constante égale à la vitesse du câble, $v = 5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Étudions le skieur dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$, à la réaction de la piste $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_\mathrm{N} + \overrightarrow{R}_\mathrm{T}$ et à la force de traction $\overrightarrow{T}$ du câble auquel il s'attache. Ces forces sont représentées figure 5.

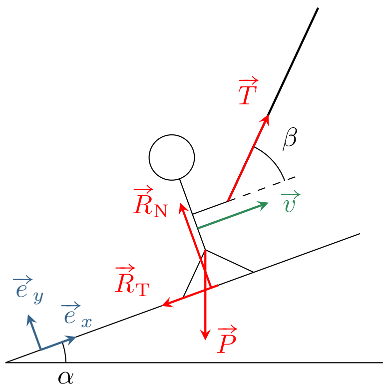


Figure 5 – Skieur entraîné par une remontée mécanique.

Calculons leur puissance.

▷ Par définition, on note $\mathcal{P}_1 = Tv\cos\beta$ la puissance exercée par le câble sur le skieur.

▷ Puissance développée par le poids :
$$\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v} = -mgv\sin(\alpha)$$

▷ Puissance développée par la réaction normale : $\mathcal{P}(\overrightarrow{R}_\mathrm{N}) = 0$ car elle est orthogonale à $\overrightarrow{v}$.

▷ Puissance développée par la réaction tangentielle : on ne peut que dire que $\mathcal{P}(\overrightarrow{R}_\mathrm{T}) = -R_\mathrm{T}v$ mais c'est ensuite plus compliqué car $\overrightarrow{R}_\mathrm{T}$ est a priori inconnue.

Il nous faut donc déterminer $\overrightarrow{R}_\mathrm{T}$. Comme le mouvement du skieur est par hypothèse rectiligne uniforme, alors par application de la loi de la quantité de mouvement,

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_\mathrm{N} + \overrightarrow{R}_\mathrm{T} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}\,.$$

En la projetant sur l'axe y incliné, on en déduit

$$-mg\cos\alpha + R_\mathrm{N} + 0 + T\sin\beta = 0 \qquad \text{soit} \qquad R_\mathrm{N} = mg\cos\alpha - T\sin\beta\,.$$

D'après la loi de Coulomb du frottement,

$$R_\mathrm{T} = fR_\mathrm{N} = fmg\cos\alpha - f\frac{\mathcal{P}_1}{v\cos\beta}\sin\beta$$

d'où on déduit la puissance développée par la force tangentielle,

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{R}_\mathrm{T}) = -fmgv\cos\alpha - f\mathcal{P}_1\tan\beta\,.$$

Comme le mouvement du skieur se fait à vitesse constante, alors la somme des puissances qu'il reçoit est nulle d'après le théorème de l'énergie cinétique. On en déduit

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}(\overrightarrow{P}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R}_\mathrm{N}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R}_\mathrm{T}) = 0$$

soit en remplaçant les puissances par leurs expressions

$$\mathcal{P}_1 - mgv\sin\alpha + 0 - fmgv\cos\alpha - f\mathcal{P}_1\tan\beta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{P}_1(1 - f\tan\beta) - mgv(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 0\,.$$

On en déduit alors

$$\mathcal{P}_1 = \frac{mgv(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{1 - f\tan\beta}$$

Estimons numériquement sa valeur, et pour cela commençons par estimer les différents angles. L'angle α se trouve grâce au dénivelé h et à la longueur totale L du câble, qui fait un aller-retour. On a donc

$$\sin\alpha = \frac{h}{L/2} = 0{,}05$$

Compte tenu de la valeur numérique, on a clairement $\alpha \ll 1$ et on peut faire l'approximation $\cos\alpha \simeq 1$. Comme $\cos\alpha$ est en plus multiplié par f et qu'on ne cherche qu'un ordre de grandeur, cette approximation est tout à fait adaptée ... en faisant le calcul rigoureusement on trouve $\cos\alpha = 0{,}9987$. Estimer l'angle β (ou plutôt sa tangente) est beaucoup moins simple. On se contentera donc de prendre $\tan\beta \simeq 1$ (c'est-à-dire $\beta \simeq \pi/4$), ce qui est sans doute une approximation grossière mais ne change à nouveau pas grand chose au résultat. Enfin, il faut également estimer la masse du skieur et de son équipement que l'on prendra égale par exemple à $m = 80\,\mathrm{kg}$. Numériquement, on a donc

$$\mathcal{P}_1 = \frac{80 \times 10 \times \dfrac{5}{3{,}6} \times (0{,}05 + 0{,}1)}{1 - 0{,}1} \simeq 2 \cdot 10^2\,\mathrm{W}\,.$$

C'est peu, mais les frottements ne sont pas énormes et la pente pas si raide non plus.

Pour déterminer la puissance totale à fournir par le moteur, on peut faire l'hypothèse que les frottements internes aux mécanismes sont négligeables, si bien que toute la puissance fournie par le moteur sert à tracter les skieurs. Il y a un skieur tous les cinq mètres sur une distance totale de 100 mètres : on en déduit qu'il y a 20 skieurs à la fois sur le remonte-pente. La puissance totale du moteur qui entraîne le remonte-pente est donc égale à

$$\mathcal{P} = 20\,\mathcal{P}_1 \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{P} = 4\,\mathrm{kW}\,.$$