Filtrage

I - Compléments mathématiques sur les signaux périodiques

- **Développement de Fourier d'un signal périodique :**

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\omega t)$$

  - ▹ composante continue = Y_0 = harmonique de rang 0 ;
  - ▹ fondamental = $Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ = harmonique de rang 1 (même fréquence que le signal) ;
  - ▹ premières harmoniques ∼ allure générale du signal ;
  - ▹ harmoniques d'ordre élevé ∼ variations rapides : discontinuité, bruit, etc.

- **Valeur moyenne et valeur efficace :** indépendantes de l'origine t_0.

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

- **Signal sinusoïdal :**

$$\langle y_{\sin} \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad Y_{\sin,\text{eff}} = \frac{Y_\text{m}}{\sqrt{2}}\,.$$

- **Signal périodique quelconque :**

$$\langle y \rangle = Y_0 \text{ (composante continue)} \qquad \text{et} \qquad Y_{\text{eff}}^{\,2} = \left\langle y(t)^2 \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle y_n(t)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n^{\,2} \quad \text{(th. de Parseval)}$$

II - Caractérisation d'un filtre linéaire

- **Filtre linéaire :** vérifie le principe de superposition $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) \longmapsto \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$.

- **Fonction de transfert harmonique :** $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{S}(\omega)}{\underline{E}(\omega)}$.
  - ▹ $|\underline{H}| = \dfrac{S_\text{m}}{E_\text{m}}$ = rapport des amplitudes ;
  - ▹ $\arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e$ = déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

- **Diagramme de Bode :** double représentation de la fonction de transfert.
  - ▹ Diagramme en gain : $G_\text{dB} = 20 \log|\underline{H}(\omega)| \iff |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_\text{dB}(\omega)/20}$;
  - ▹ Diagramme en phase : $\Delta\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(\omega)$;
  - ▹ Abscisse en échelle logarithmique, souvent pulsation réduite $x = \omega/\omega_\text{réf}$:

- **Bande passante :** $\omega \in \text{BP} \iff |\underline{H}(\omega)| > \dfrac{H_\text{réf}}{\sqrt{2}} \iff G_\text{dB}(\omega) > G_\text{réf} - 3\,\text{dB}$

III - Étude de filtres

- **Déterminer la nature du filtre par équivalence de dipôles :**
  - ▹ Basse fréquence : condensateur $\Longleftrightarrow$ interrupteur ouvert ; bobine $\Longleftrightarrow$ fil ;
  - ▹ Haute fréquence : condensateur $\Longleftrightarrow$ fil ; bobine $\Longleftrightarrow$ interrupteur ouvert.

  ❶ Dessiner (au moins dans sa tête) deux schémas équivalents du filtre, en haute et basse fréquence ;
  ❷ Déterminer $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ sur ces schémas ;
  ❸ Si $\underline{S} = \underline{E}$ alors le signal est transmis, si $\underline{S} = 0$ alors il est coupé.

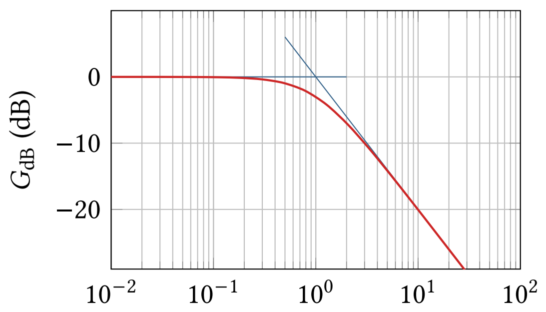
- **Établir la fonction de transfert sous forme canonique**
  ❶ Exprimer $\underline{H}$ en fonction des composants avec un pont diviseur ;
  ❷ Multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité permettant de faire apparaître les 1 « aux bons endroits » ;
  ❸ Identifier les paramètres de la forme canonique.

- **Tracer un diagramme de Bode :** diagramme asymptotique auquel on superpose l'allure du diagramme réel.

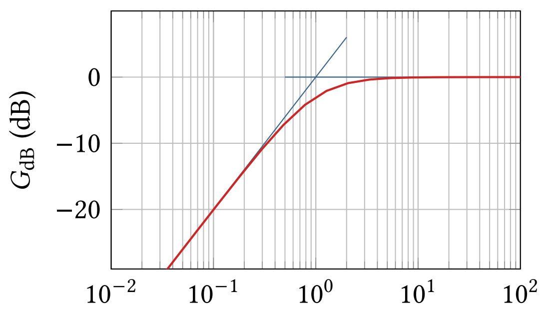
  ❶ Étudier séparément les limites basse et haute fréquence ;
  ❷ Pour chaque limite, **commencer** par calculer la fonction de transfert équivalente en ne conservant que les termes dominants du numérateur et du dénominateur ;
  ❸ **Dans un second temps**, calculer le module et l'argument pour obtenir les équations des asymptotes ;
  ❹ Pour un deuxième ordre, l'allure du diagramme réel est précisée en calculant explicitement la valeur exacte en $\omega = \omega_0$ (existence éventuelle d'une résonance).

Attention ! Exprimer le module et l'argument en toute généralité pour prendre des équivalents dans un second temps alourdit énormément les calculs !

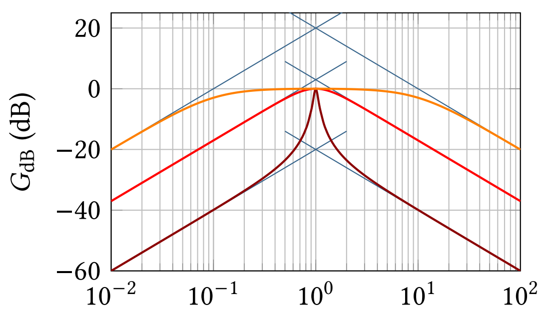
- **Filtres de référence :** pulsation réduite en abscisse.



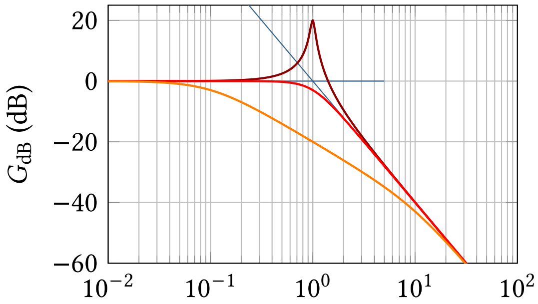
- **Passe-bas du premier ordre :** $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$
  - ▹ pente −20 dB/décade en haute fréquence ⇝ intégrateur ;
  - ▹ bande passante : $[0, \omega_c[$.



- **Passe-haut du premier ordre :** $\underline{H} = \dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c} H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$
  - ▹ pente 20 dB/décade en basse fréquence ⇝ dérivateur ;
  - ▹ bande passante : $[\omega_c, +\infty[$.



- **Passe-bande du second ordre :** $\dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$
  - ▹ pente ±20 dB/décade en haute et basse fréquence ;
  - ▹ plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est aigue, plus le filtre est sélectif ;
  - ▹ bande passante de largeur $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.



- **Passe-bas du second ordre :** $\dfrac{H_0}{1 - x^2 + \dfrac{jx}{Q}}$
  - ▹ pente −40 dB/décade en haute fréquence : les signaux sont dix fois plus atténués qu'avec un premier ordre ;
  - ▹ il faut éviter la résonance : $Q = 1/\sqrt{2}$ optimal.

IV - Transformation d'un signal par un filtre

- **Signal sinusoïdal :**

$$e(t) = E_\mathrm{m} \cos(\omega_e t + \varphi_e) \quad \longmapsto \quad s(t) = S_\mathrm{m} \cos(\omega_e t + \varphi_s) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} S_\mathrm{m} = \left|\underline{H}(\omega = \omega_e)\right| E_\mathrm{m} \\ \varphi_s = \varphi_e + \arg \underline{H}(\omega = \omega_e) \end{cases}$$

- **Signal quelconque :** principe de superposition

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad \Longrightarrow \qquad s(t) = |\underline{H}(0)| E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega)| E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(n\omega)\right)$$

Attention ! Le module et l'argument de $\underline{H}$ sont à calculer pour chaque harmonique, avec sa propre pulsation. Il ne suffit pas de considérer une seule valeur à la pulsation du signal.

- **Filtre moyenneur :** $s(t) = H_0 \langle e \rangle = \text{cte} \rightsquigarrow$ passe-bas de fréquence de coupure $f_\mathrm{c} \ll f$.

- **Filtre dérivateur :**

$$s(t) = \tau \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{H} = \mathrm{j}\omega\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{pente } + 20 \text{ dB/décade} \\ \Delta\varphi = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- **Filtre intégrateur :**

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(t)\, \mathrm{d}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{H} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{pente } -20 \text{ dB/décade} \\ \Delta\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

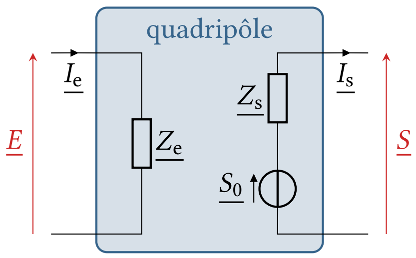
V - Association de filtres

- **Influence de la charge de sortie :** l'expression de la fonction de transfert établie en sortie ouverte n'est en général plus valable, car la charge impacte le fonctionnement du filtre (p.ex. pont diviseur plus valable).

- **Mise en cascade de filtres :** on ne multiplie pas les fonctions de transfert en sortie ouverte !

$$\underline{H}_\mathrm{tot} \neq \underline{H}_1^\mathrm{s.o.} \times \underline{H}_2^\mathrm{s.o.}$$

- **Impédances d'entrée et de sortie :**



- ▹ $\underline{Z_\mathrm{e}}$ impédance d'entrée ;
- ▹ $\underline{Z_\mathrm{s}}$ impédance de sortie ;
- ▹ $\underline{S_0} = \underline{H^\mathrm{s.o.}}\, \underline{E}$ avec $\underline{H^\mathrm{s.o.}}$ la fonction de transfert en sortie ouverte.

Association de filtres : si $|\underline{Z_{\mathrm{s}1}}| \ll |\underline{Z_{\mathrm{e}2}}|$ alors $\underline{H_\mathrm{tot}} = \underline{H_1^\mathrm{s.o.}} \times \underline{H_2^\mathrm{s.o.}}$

$\rightsquigarrow$ intérêt de minimiser $\underline{Z_\mathrm{s}}$ et de maximiser $\underline{Z_\mathrm{e}}$ à la conception d'un filtre.