

# Filtrage

## Se préparer

### Exercice 1 : Passe bas du second ordre

 1 |  2 | 

-  ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Tracé de diagramme de Bode.

#### Correction des questions d'analyse du corrigé

**Question d'analyse 1** - La tension aux bornes d'un interrupteur ouvert est indéterminée, c'est-à-dire qu'elle peut effectivement être nulle ... ou pas !

**Question d'analyse 2** - Pour appliquer un pont diviseur, les dipôles doivent être montés en série, c'est-à-dire parcourus par le même courant. Or ici  $L$  et  $C$  ne sont pas montés en série (ni en parallèle, d'ailleurs) à cause de la résistance. En revanche, l'association de  $R$  et  $C$  (leur impédance équivalente) est bien montée en série avec la bobine.

**Question d'analyse 3** - Par définition,  $\underline{Y}_{RC} = 1/Z_{RC}$  donc  $\underline{Y}_{RC} \times Z_{RC} = 1$ . La deuxième expression est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur de la première par  $\underline{Y}_{RC}$ .

**Question d'analyse 4** - Les équivalents ne conservent **qu'un seul** terme, le terme dominant : en l'occurrence,  $jx/Q$  est divergent mais  $-x^2$  l'est aussi, et diverge plus rapidement. C'est donc  $-x^2$  le terme dominant.

**Question d'analyse 5** - Le module intervient dans la définition du gain, ce qui enlève les signes :  $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$ . L'autre signe apparaît ensuite à cause du log de l'inverse.

**Question d'analyse 6** - Un phénomène de résonance peut exister dans les systèmes d'ordre 2, auquel cas le diagramme de Bode réel diffère significativement du diagramme asymptotique.

**Question d'analyse 7** - On utilise l'égalité  $1/j = -j$ , qui vient du fait que  $j^2 = -1$ .

**Question d'analyse 8** - Deux façons de faire : on place le point le plus facile, celui en  $x = 10^0 = 1$ , en faisant bien attention à utiliser l'équation de l'asymptote et pas la valeur réelle (c'est l'asymptote que l'on trace !!), puis on utilise la pente de  $-40$  dB/décade pour prolonger la droite. Sinon, on peut aussi utiliser l'équation de l'asymptote pour trouver un deuxième point.

## Analyse spectrale

### Exercice 2 : Signal triangulaire

 1 | 

-  ▷ Valeur moyenne et valeur efficace ;
- ▷ Développement de Fourier.

**1** Le signal est affine par morceaux, nul en  $\pm T/2$  : en notant  $U_{\max} = 2$  V sa valeur maximale et  $T = 1$  ms sa période,

$$u(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) U_{\max} & \text{pour } t \geq 0 \\ \left(1 + \frac{2t}{T}\right) U_{\max} & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

**2** Graphiquement, il est clair que  $\langle u \rangle = U_{\max}/2$ , ce que l'on peut vérifier par le calcul direct.

**3** Par parité, il suffit de calculer l'intégrale pour  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}\langle u(t)^2 \rangle &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 U_{\max}^2 dt \\ &= \frac{2U_{\max}^2}{T} \left[ \frac{4t^3}{3T^2} - \frac{2t^2}{T} + t \right]_0^{T/2} \\ &= \frac{2U_{\max}^2}{T} \times \frac{T}{6} \\ \langle u(t)^2 \rangle &= \frac{U_{\max}^2}{3} \\ U_{\text{eff}} &= \boxed{\frac{U_{\max}}{\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

**4** D'après le théorème de Parseval, et puisque  $U_{\text{cc}} = U_{\max}$ ,

$$\langle u^2 \rangle = \langle u \rangle^2 + \sum_{n \text{ impair}} \left( \frac{4U_{\max}}{n^2 \pi^2} \right)^2 \langle \cos^2(n\omega t) \rangle$$

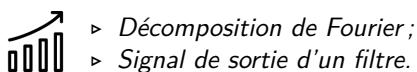
ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{U_{\max}^2}{3} &= \frac{U_{\max}^2}{4} + \sum_{n \text{ impair}} \left( \frac{4U_{\max}}{n^2 \pi^2} \right)^2 \times \frac{1}{2} \\ \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{8} \times \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ \boxed{\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}}\end{aligned}$$

Ce résultat n'a aucun intérêt physique, pas sûr non plus qu'il ait un intérêt mathématique ... mais il s'agit d'une illustration de ce que l'on peut faire en maths avec des développements en série de Fourier.

### Exercice 3 : Filtrage d'un signal

oral banque PT | 2 | 1 |



- ▷ Décomposition de Fourier;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

**1** Voir figure 1. On superpose visuellement chaque courbe : à une constante se superpose un sinus lent de grande amplitude, auquel se superpose un sinus rapide de faible amplitude.

**2** En posant  $f = 1 \text{ kHz}$  et  $A = 1 \text{ V}$ , le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A + 3A \cos(2\pi ft) + \frac{A}{10} \cos\left(40\pi ft + \frac{\pi}{2}\right).$$

**3** Voir figure 2. Un filtre idéal transmet (resp. coupe) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à sa bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

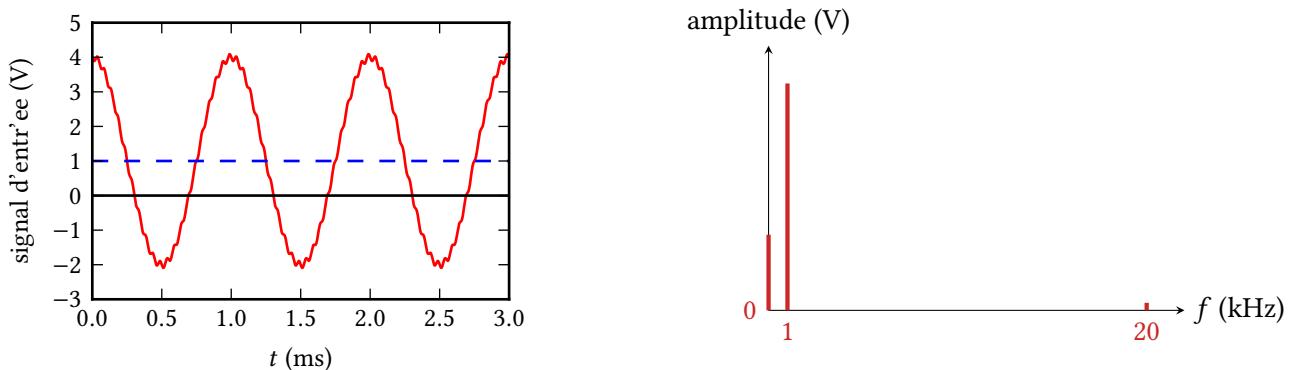


Figure 1 – Signal d'entrée.

**Exercice 4 : Lecture de diagrammes de Bode**

1 | 1 | 1



- ▷ *Lecture de diagrammes de Bode ;*
- ▷ *Reconstruction du signal de sortie d'un filtre.*

**Rappel de cours :** Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(n\omega)| E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(n\omega))$$

où  $|\underline{H}(n\omega)| = 10^{G_{dB}(n\omega)/20}$  et  $\arg \underline{H}(n\omega) = \varphi(\omega_n)$ .

Pour faciliter la rédaction on note  $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$  et de même pour le signal de sortie  $s$ . Ainsi, par linéarité, chaque composante  $e_n$  du signal d'entrée donne une composante  $s_n$  au signal de sortie.

• **Premier filtre :**

D'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut, de fréquence caractéristique  $f_0$  de l'ordre de 10 kHz**. Son asymptote TBF a pour pente 40 dB/décade, il s'agit donc d'un **filtre d'ordre 2**.

Reconstruisons le signal de sortie :

- ▷ Le terme constant  $e_0$  est complètement coupé par le filtre,  $s_0 = 0$ .
- ▷ L'harmonique de fréquence  $f$  est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division par 100), soit  $s_1(t) \approx 0$ .
- ▷ L'harmonique de fréquence  $10f$  est atténuée de 10 dB, ce qui correspond à un gain en amplitude de  $10^{-G_{dB}/20} = 10^{-1/2} \approx 0,3$ , et elle est également déphasée de  $+\pi/2$ , donc

$$s_{10}(t) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

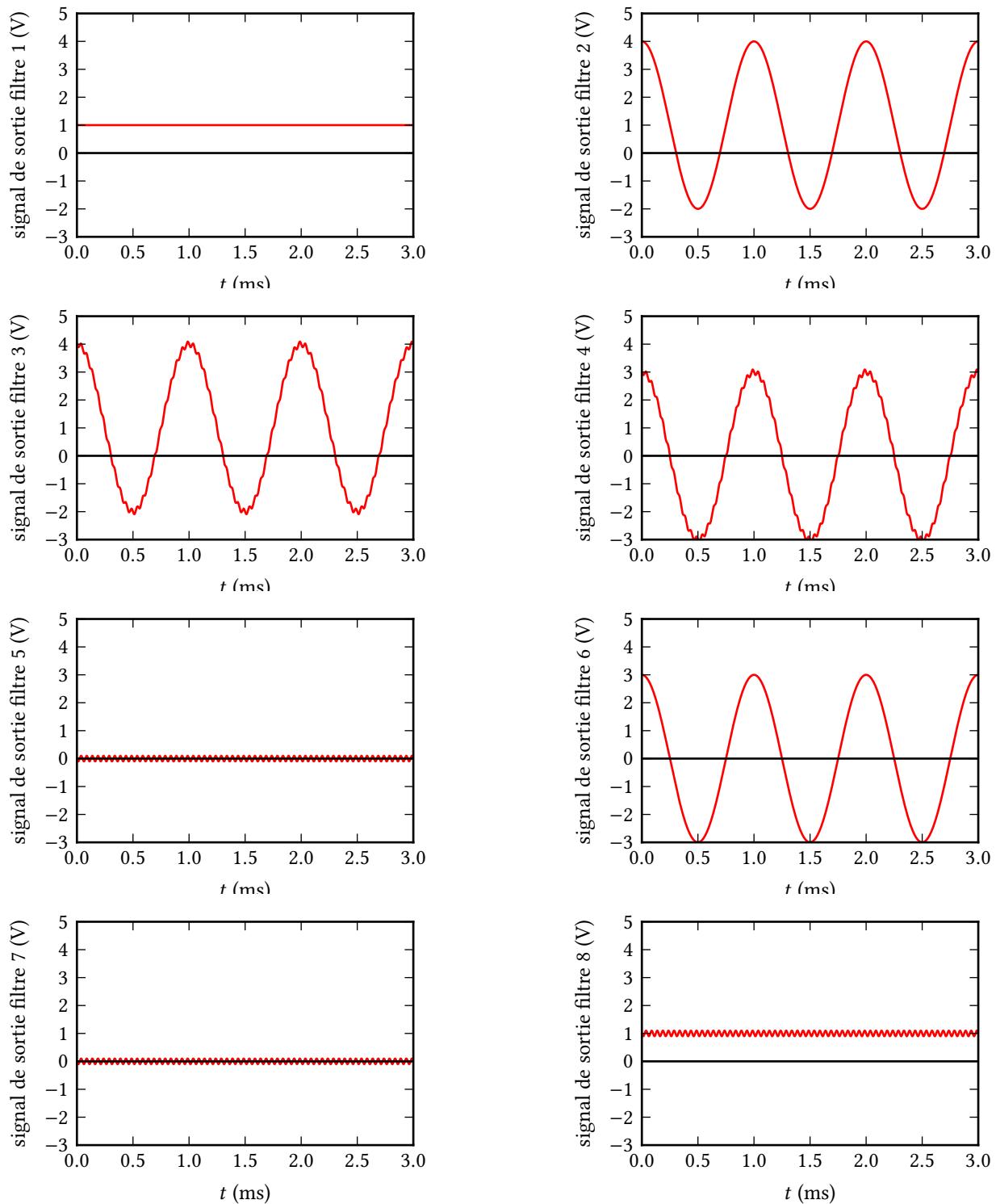
- ▷ L'harmonique de fréquence  $100f$  n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc

$$s_{100}(t) \approx e_{100}(t) = E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Finalement,

$$s(t) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

• **Deuxième filtre :**

**Figure 2 – Signaux de sortie des différents filtres.**

D'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut, de fréquence caractéristique  $f_0$  de l'ordre de 0,1 kHz**. Son asymptote TBF a pour pente 40 dB/décade, il s'agit donc d'un **filtre d'ordre 2**, ce qui est confirmé par la présence de la résonance.

Pour reconstruire le signal de sortie, il suffit de remarquer que la fréquence  $f$  est d'une décade supérieure à la fréquence propre du filtre. Un signal harmonique de cette fréquence n'est presque pas atténué ni déphasé par le filtre, et c'est encore plus vrai pour les signaux de fréquence  $10f$  et  $100f$ . En revanche, le terme constant est coupé par le filtre. Ainsi,

$$s(t) = E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

#### • Troisième filtre :

Ce filtre laisse passer les basses et les hautes fréquences, mais coupe une bande de fréquence intermédiaire : il s'agit d'un **filtre coupe-bande** dont la fréquence coupée vaut 1 kHz. Vous n'avez pas à savoir identifier l'ordre d'un tel filtre : pour information, il s'agit d'un ordre 2.

La composante  $e_1$  est exactement de la fréquence coupée : elle ne contribue donc pas du tout au signal de sortie, c'est-à-dire  $s_1 = 0$ . Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquence suffisamment différente de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. La signal de sortie s'écrit donc sous la forme

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

#### • Quatrième filtre :

Le diagramme de Bode est celui d'un **filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = 100$  Hz**. L'asymptote très haute fréquence a une pente de  $-20$  dB/décade, le filtre est donc **du premier ordre**.

Le terme constante  $e_0$  passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de Bode puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple : comme le filtre est d'ordre 1, alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple,

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

*Attention à ne pas oublier la pulsation de coupure en préfacteur ... sans quoi les expressions ne sont pas homogènes.*

En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où finalement

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

**Exercice 5 : Signal de sortie d'un filtre**

adapté oral banque PT | 3 |



- ▷ Développement de Fourier ;
- ▷ Lecture d'un diagramme de Bode ;
- ▷ Reconstruction du signal de sortie d'un filtre.

**Attention !** Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

**1** Le signal créneau a une **amplitude de 2,5 V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**. On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair,  $v_e(-t) = -v_e(t)$ , soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t)$$

soit à tout instant

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = 0$$

ce qui ne peut être vérifié que si

$$\forall k, \quad B_k = 0.$$

*En termes mathématiques, on utilise le fait que les fonctions sinusoïdales constituent une famille libre. Physiquement, un signal est constamment nul si et seulement si toutes les harmoniques de ce signal sont d'amplitude nulles.*

**2** Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est  $f_0 = 3 \text{ kHz}$ .

**3** Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence  $3f = 3 \text{ kHz}$** , et une amplitude que l'on peut estimer **égale à 1 V**, en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang  $k = 3$  du signal d'entrée.

**4** Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental  $k = 1$  et l'harmonique de rang  $k = 5$ .

**5** On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental  $k = 1$  du créneau. Retrouvons ce résultat à partir du diagramme de Bode.

▷ pour le fondamental  $k = 1 : f = 1 \text{ kHz}$  donc  $G_{\text{dB}} = -22 \text{ dB}$ , si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{1,s} = |H(1 \text{ kHz})| A_{1,e} = 10^{-22/20} \frac{4A}{\pi}.$$

▷ pour l'harmonique  $k = 5 : f = 5 \text{ kHz}$ , donc  $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$ , si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{5,s} = |H(1 \text{ kHz})| A_{5,e} = 10^{-15/20} \frac{4A}{5\pi}.$$

Finalement, le rapport des amplitudes de ces deux harmoniques vaut

$$\frac{A_{1,s}}{A_{5,s}} = \frac{10^{-22/20}}{10^{-15/20}} \times 5 = 2,2,$$

ce qui confirme que le fondamental joue un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique  $k = 5$ .

**6** L'amplitude de toutes les harmoniques de rang  $k \geq 7$  est inférieure à celle de rang 5 dans le signal d'entrée, et on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5. Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang  $k \geq 7$  le sont forcément aussi.

**7** On calcule d'abord les valeurs des amplitudes ... puis on trace !

Harmonique k	Fréquence $f_k$ (kHz)	Amplitude en entrée $4A/k\pi$ (V)	Amplitude en sortie $10^{G_{\text{dB}}(f_k)/20} \times 4A/k\pi$ (V)
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

On remarque que le caractère négligeable des harmoniques 5 et 7 s'avère finalement assez discutable !

## Étude de filtres

### Exercice 6 : Filtre passe-haut d'ordre 2



-  ▷ Fonction de transfert;
- ▷ Tracé d'un diagramme de Bode.

**[1]** Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.

- ▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc  $\underline{S} = 0$  ;
- ▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles  $\underline{S} = \underline{E}$ . Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

**[2]** D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par  $1 = \omega_0/\omega_0$ , ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{j\frac{L\omega_0}{R}x}{1 + \frac{1}{jRC\omega_0x} + j\frac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$  et  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \quad \text{et} \quad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

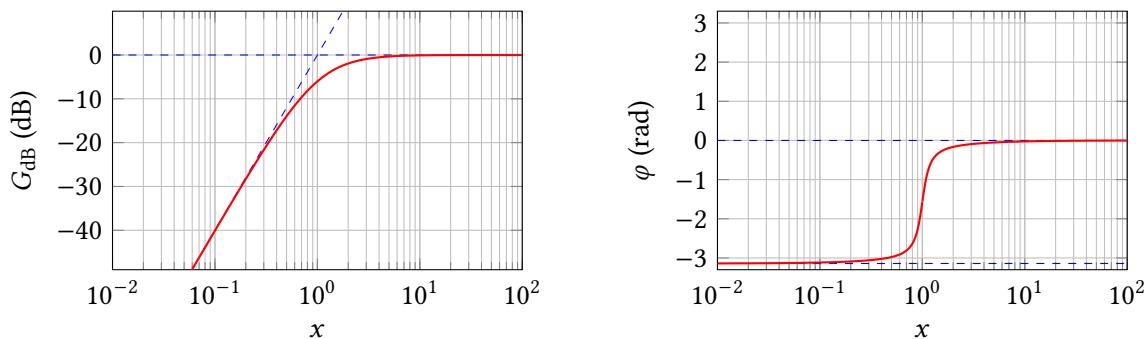
$$\boxed{\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}}$$

**[3]** Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$  ou  $x \gg 1$ ),

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{-jQ/x} \sim -x^2 \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence  $x \gg 1$ ,

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{jQx} \sim 1 \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 0$$



**Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2.** Tracé pour  $Q = 1/2$ , diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour  $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$ ) sont représentés figure 3.

**4** Le comportement intégrateur ou déivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente  $\pm 20$  dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de déivateur.**

### Exercice 7 : Filtre RL

1 | 1 |

- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Tracé d'un diagramme de Bode ;
- ▷ Reconstruction du signal de sortie d'un filtre.

**1** Analyse asymptotique par équivalence :

- ▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc  $S = 0$  ;
- ▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles  $s = e$ .

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut**.

**2** Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_c = R/L \end{cases}}$$

**3** Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence  $\omega \ll \omega_c$ ,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \sim \frac{j\omega}{\omega_c} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Ainsi, la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente  $+20$  dB/décade et elle passe par le point  $G_{\text{dB}} = 0$  en  $x = 1$ .

De même dans la limite très haute fréquence  $\omega \gg \omega_c$ ,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = 1. \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log 1 = 0.$$

L'asymptote haute fréquence est donc une asymptote horizontale. On en déduit l'allure du diagramme de Bode représenté figure 4.

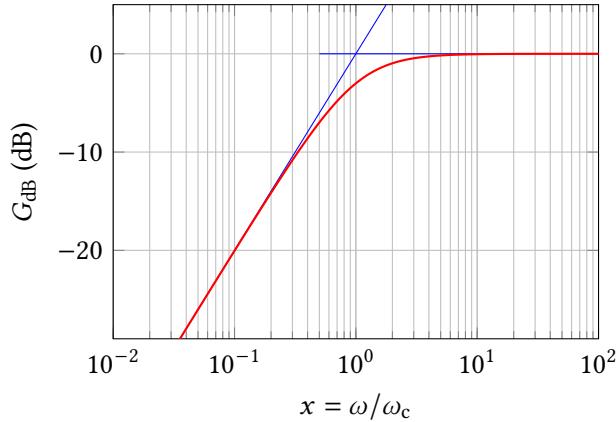


Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre RL.

**4** Comme les trois harmoniques sont de même amplitude, et choisissant nulle leur phase commune,

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi f_1 t) + E_0 \cos(2\pi f_2 t) + E_0 \cos(2\pi f_3 t).$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 16 \text{ kHz}.$$

*Rappel de cours :* Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$

où  $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$  et  $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$ .

- ▶ La composante de pulsation réduite  $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$  se trouve dans le domaine basse fréquence du filtre, donc  $|\underline{H}(x_1)| \approx x_1 = 6 \cdot 10^{-3} \ll 1$  : on pourra donc négliger cette composante dans le signal de sortie, puisque son amplitude est très inférieure aux autres.
- ▶ La composante de pulsation réduite  $x_2 = f_2/f_c = 6 \cdot 10^{-2}$  ne se trouve plus vraiment dans le domaine basse fréquence, du moins pas pour la courbe de phase. On peut calculer numériquement  $|\underline{H}(x_2)| = 1/16$  et lire graphiquement sur le diagramme de phase un déphasage  $\Delta\varphi(x_2) = 1,5 \text{ rad}$ .
- ▶ De même pour la composante de pulsation réduite  $x_3$ , on calcule  $|\underline{H}(x_3)| = 0,99 \approx 1$  et on lit graphiquement  $\Delta\varphi(x_1) = 0,2 \text{ rad}$ .

En conclusion,

$$s(t) = \frac{E_0}{16} \cos(2\pi f_2 t + 1,5) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0,2).$$

**5** La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique de fonction de transfert équivalente  $j\omega/\omega_c$ . En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en déivateur,

$$s(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{de}{dt}.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle. Étant dans la bande coupée du filtre, son amplitude sera très faible.

**Exercice 8 : Modélisation d'un récepteur radio**

oral banque PT | 2 | 1

- 
- ▷ Fonction de transfert ;
  - ▷ Bande passante.

**1** Le récepteur doit réaliser un **filtrage passe-bande**. La tension de sortie doit donc être mesurée **aux bornes de la résistance**, voir figure 5. En effet,

- ▷ dans la limite très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc  $I = 0$  donc d'après la loi d'Ohm  $\underline{S} = 0$ ;
- ▷ dans la limite très haute fréquence, c'est cette fois la bobine qui est équivalente à un interrupteur ouvert donc on a de même  $\underline{S} = 0$ .

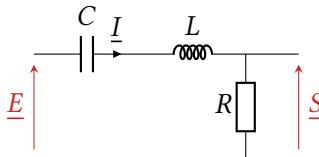


Figure 5 – Modèle de récepteur radio.

Le condensateur et la bobine montés en série sont équivalents à une impédance

$$\underline{Z}_{LC} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

En identifiant un pont diviseur de tension,

$$\underline{\underline{H}} = \frac{\underline{S}}{\underline{\underline{E}}} = \frac{R}{R + \underline{Z}_{LC}} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{LC}}{R}}$$

soit en remplaçant

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}}.$$

**2** Un critère possible serait que la fréquence centrale  $f_0$  du passe-bande doit être incluse dans la bande de fréquence que l'on cherche à capter. En utilisant les résultats connus sur le RLC série,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

et ainsi

$$f_0 > f_1 = 150 \text{ kHz} \quad \text{donc} \quad 2\pi\sqrt{LC} < \frac{1}{f_1} \quad \text{d'où} \quad C < \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 L} = 9,8 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

et de même

$$f_0 < f_2 = 300 \text{ kHz} \quad \text{donc} \quad 2\pi\sqrt{LC} > \frac{1}{f_2} \quad \text{d'où} \quad C > \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 L} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

Ainsi,

$$\boxed{0,24 \text{ nF} < C < 0,98 \text{ nF}.}$$

**3** Pour que le filtre soit le plus sélectif possible, il faut que sa bande passante soit la plus étroite possible. Pour un passe-bande, elle vaut (résultat de cours à connaître)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Il faut donc maximiser le facteur de qualité, qui vaut pour un RLC série

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Comme les valeurs de  $L$  et  $C$  sont imposées par la fréquence captée, la seule possibilité est de choisir la résistance la plus petite possible.

*Dans le cas des récepteurs radios amateur « historiques » qui reposaient plus ou moins sur ce système, la résistance n'était que de l'ordre de quelques ohms.*

### Exercice 9 : Atténuateur différentiel

oral CCINP MP | ☰ 2 | ☷ 2 | ☰

- ▶ Fonction de transfert ;
- ▶ Analyse d'un diagramme de Bode ;
- ▶ Reconstruction du signal de sortie d'un filtre.

**1** Une association RC parallèle a pour impédance

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

Avec un pont diviseur,

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}}.$$

**2** La fonction de transfert fait apparaître deux pulsations caractéristiques  $\omega_1 = 1/R_1C_1$  et  $\omega_2 = 1/R_2C_2$ , ce qui explique l'existence de trois domaines dans le diagramme de Bode. Supposons  $\omega_1 < \omega_2$ .

- ▶ Domaine basses fréquences :  $\omega \ll \omega_1, \omega_2$

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \text{cte}$$

d'où une asymptote horizontale.

- ▶ Domaine intermédiaire :  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{jR_1C_1\omega}} \simeq jR_2C_1\omega \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log(R_2C_1\omega).$$

ce qui est cohérent avec la pente de +20 dB/décade observée dans ce domaine.

- ▶ Domaine hautes fréquences :  $\omega \gg \omega_1, \omega_2$

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{jR_2C_2\omega}{jR_1C_1\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}} = \text{cte}$$

d'où une deuxième asymptote horizontale.

*Justifier que  $1 \ll \left| \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{jR_1C_1\omega} \right|$  dans le domaine de fréquence intermédiaire n'est pas du tout évident, car les valeurs des composants ne sont pas connues à ce stade. Il s'agit cependant de la seule façon d'obtenir une équation de droite, et je ne pense pas que l'auteur du sujet attende plus de justification à ce stade. Une fois les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  obtenues à la question suivant, on peut le justifier a posteriori :  $R_1/R_2 = 1 \cdot 10^3$ ,*

et le domaine intermédiaire est tel que  $R_1 C_1 \omega = \omega / \omega_1 < 1 \cdot 10^2$ , ce qui permet de confirmer que le 1 est bien négligeable. Pour faire les choses de manière complètement rigoureuse, il aurait donc fallu mélanger les questions 2 et 3 pour déterminer le rapport  $R_1/R_2$  avant d'étudier le domaine intermédiaire.

Il n'y a aucun moyen a priori de savoir comment s'ordonnent les valeurs des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Supposer  $\omega_1 < \omega_2$  comme nous l'avons fait conduit à des résultats cohérents avec le diagramme représenté. Supposer au contraire  $\omega_2 > \omega_1$  conduit à une pente négative dans le domaine intermédiaire, ce qui est contradictoire avec le diagramme, et permet de valider la première hypothèse.

### 3 Raisonnons dans les deux domaines extrêmes. En basse fréquence,

$$|\underline{H}| = 10^{-60/20} = 1 \cdot 10^{-3}$$

Une aussi faible valeur implique forcément  $R_1/R_2 \gg 1$ , ce qui permet d'approximer

$$|\underline{H}| \simeq \frac{1}{R_1/R_2} \quad \text{d'où} \quad R_2 = 10^{-3} R_1 = 100 \Omega.$$

La première pulsation caractéristique est

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} = 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad C_1 = \frac{1}{R_1 \omega_1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ F}.$$

En utilisant l'équivalent haute fréquence,

$$|\underline{H}| = 10^{-20/20} = \frac{1}{10} \quad \text{d'où} \quad C_2 = 9 C_1 = 9 \cdot 10^{-7} \text{ F}.$$

On peut aussi raisonner sur la seconde pulsation caractéristique, qui vaut

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad C_2 = \frac{1}{R_2 \omega_2} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

Les deux valeurs sont proches mais légèrement différentes, ce qui vient d'une simplification faite par l'énoncé dont les valeurs sont légèrement incohérentes les unes avec les autres. En prenant  $C_2 = 9 \cdot 10^{-7} \text{ F}$ , alors  $\omega_2 = 1,1 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  au lieu de  $1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  comme l'énoncé le sous-entend. Les deux valeurs seraient bien sûr considérées correctes tant que les raisonnements sont bons!

### 4 Le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega' t + \varphi_0).$$

Supposons les deux pulsations suffisamment éloignées de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour pouvoir assimiler la fonction de transfert à ses équivalents asymptotiques. La fonction de transfert est réelle dans ces deux limites, il n'y a donc pas de déphasage. Alors,

$$s(t) = \frac{A}{1000} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{A}{10} \cos(\Omega' t + \varphi_0).$$

5 Supposons là aussi que la fonction de transfert peut être assimilée à son équivalent dans le domaine intermédiaire pour les deux pulsations. Celui-ci étant imaginaire pur, le plus simple pour les calculs est de repasser dans le domaine temporel :

$$\underline{H} \sim j R_2 C_1 \omega \quad \text{d'où} \quad s(t) = R_2 C_1 \frac{de}{dt}.$$

On peut alors en déduire

$$s(t) = -R_2 C_1 A \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) - R_2 C_1 A \Omega' \sin(\Omega' t + \varphi_0).$$

Même s'il ne se « voit » pas directement, le déphasage se manifeste par la transformation des cosinus en sinus dans les expressions des signaux d'entrée et de sortie.

**Exercice 10 : Filtre ADSL**

- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Analyse d'un diagramme de Bode.

**1** Récupérer les signaux téléphoniques demande d'utiliser **un filtre passe-bas** alors que les signaux internet sont récupérés par **un filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être intermédiaire entre les fréquences extrêmes des canaux téléphone et internet, ce qui est bien le cas de 10 kHz. Comme les signaux sont déjà relativement atténués à la fréquence de coupure (typiquement -3 dB, soit un facteur 0,71 en amplitude), il ne faut pas choisir la limite de la bande de fréquence d'intérêt comme fréquence de coupure.

**2** Dans la limite basse fréquence, les bobines sont équivalentes à des fils et  $s = 0$  : ce filtre coupe donc les basses fréquences. Dans la limite haute fréquence, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne peut donc parcourir le circuit, et on déduit de la loi des mailles  $s = e$ . Le filtre est donc **un filtre passe-haut**, qui permet de récupérer les hautes fréquences et qu'il faut donc **brancher sur la box internet**.

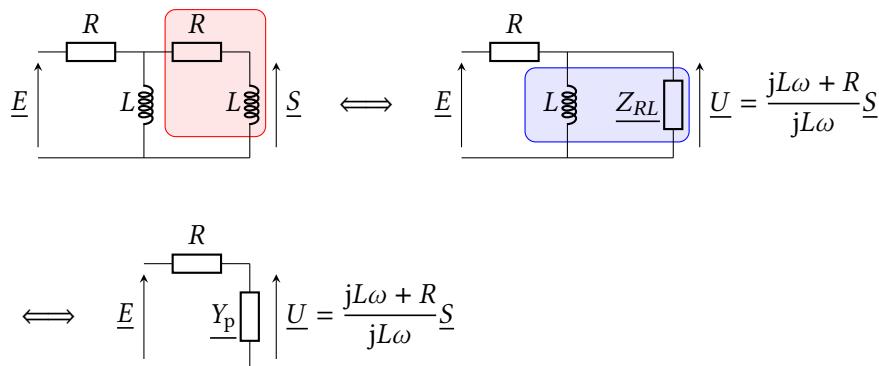


Figure 6 – Fonction de transfert du filtre ADSL. Version couleur sur le site de la classe.

**3** Raisonnons à partir de la figure 6. Comme il n'est pas possible d'utiliser directement un pont diviseur entre  $\underline{S}$  et  $\underline{E}$ , on commence par associer la bobine et la résistance encadrées en une impédance complexe  $Z_{RL} = R + jL\omega$ . La résistance et la bobine sont montées en série, donc d'après le pont diviseur et avec les notations de la figure,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{U}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{U} = \frac{R + jL\omega}{jL\omega} \underline{S}.$$

La tension  $\underline{U}$  est aux bornes de l'association parallèle de  $Z_{LR}$  et  $L$ , encadrée en bleu. Cette association a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_p} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{Z_{RL}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R + 2jL\omega}{jL\omega(R + jL\omega)}$$

Enfin, on applique un diviseur de tension entre  $Z_p = 1/Y_p$  et  $R$ ,

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_p}}{R + \underline{Z_p}} = \frac{1}{1 + R \underline{Y_p}} \quad \text{soit} \quad \frac{R + jL\omega}{jL\omega} \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + R \underline{Y_p}} \quad \text{donc} \quad \underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{1}{1 + R \underline{Y_p}}$$

Remplaçons  $\underline{Y_p}$  par son expression,

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{\text{j}L\omega}{R + \text{j}L\omega} \times \frac{1}{1 + R \frac{\text{j}L\omega}{\text{j}L\omega(R + \text{j}L\omega)}} \\ &= \frac{\text{j}L\omega}{R + \text{j}L\omega + \frac{R(R + 2\text{j}L\omega)}{\text{j}L\omega}} \\ &= \frac{(\text{j}L\omega)^2}{\text{j}RL\omega + (\text{j}L\omega)^2 + R^2 + 2\text{j}RL\omega} \\ &= \frac{(\text{j}L\omega)^2}{\text{j}RL\omega + (\text{j}L\omega)^2 + R^2 + 2\text{j}RL\omega} \\ &= \frac{-L^2\omega^2}{R^2 + 3\text{j}RL\omega - L^2\omega^2}\end{aligned}$$

Maintenant que la fonction de transfert se présente bien sous la forme d'un quotient de deux polynômes en  $\text{j}\omega$ , mettons-là sous la forme indiquée par l'énoncé. Le degré des polynômes en  $\omega$  est le bon, il reste seulement à faire apparaître 1 comme coefficient de degré 0 du polynôme du dénominateur en divisant numérateur et dénominateur par  $R^2$ ,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-\frac{L^2}{R^2}\omega^2}{1 + 3\text{j}\frac{L}{R}\omega - \frac{L^2}{R^2}\omega^2} = \frac{-x^2}{1 + 3\text{j}x - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{L\omega}{R} = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

**[4]** Dans la limite très basse fréquence,  $\omega \ll \omega_0$  et  $x \ll 1$ . En ne conservant que le terme dominant,

$$\underline{H}(x) \sim \frac{-x^2}{1} = -x^2 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(x)| \sim 40 \log x \\ \varphi \sim \pi \end{cases}$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de **40 dB/décade** en gain et **une horizontale valant  $\pi$**  en phase.

Dans la limite très haute fréquence,  $\omega \gg \omega_0$  et  $x \gg 1$ . En ne conservant que le terme dominant,

$$\underline{H}(x) \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(x)| \sim 0 \\ \varphi \sim 0 \end{cases}$$

Les deux asymptotes très haute fréquence sont **des horizontales à hauteur 0 dB en gain et 0 rad en phase**.

La fréquence maximale du canal téléphonique est de 4 kHz. Par lecture du diagramme de Bode, **le gain en décibel est de l'ordre de -18 dB**. Comme

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \quad \text{alors} \quad |\underline{H}| = 10^{G_{\text{dB}}/20} = 10^{-18/20} \sim 0,13.$$

Ainsi, cette composante est **atténuée d'un peu moins d'un facteur 10**.

**[5]** D'après la fonction de transfert,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{R}{L} \quad \text{d'où} \quad \boxed{L = \frac{R}{2\pi f_0} = 1,6 \text{ mH.}}$$

Cette valeur d'inductance correspond bien à celle indiquée sur les fiches techniques des filtres ADSL.

**Exercice 11 : Filtre RLC**

oral banque PT | 3 |



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Analyse d'un diagramme de Bode ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

**1** Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et  $C$  à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi  $v_s = 0 + 0$ . Dans la limite très haute fréquence,  $C$  est équivalent à un fil donc on a directement  $v_s = v_e$ .

~ le filtre est un passe-haut.

**2** Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{RL}}}{\underline{Z_{RL}} + \underline{Z_C}} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}.$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par  $jC\omega$ ,

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.

Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement  $\omega_0$  et  $Q$  car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

et

$$jRC\omega = \frac{jx}{Q} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

**3** En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{jx}{1} = \frac{jx}{Q} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log x - 20 \log Q,$$

la pente est donc de +20 dB/décade.

En très haute fréquence,

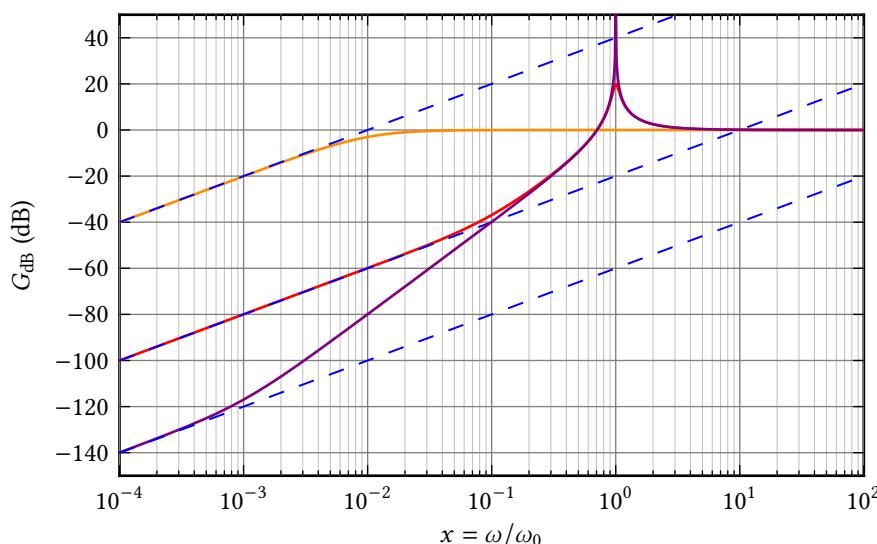
$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} = 0$$

ce qui est conforme avec une asymptote horizontale.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ( $x = 10^0 = 1$ ),  $G_{\text{dB}} = -20 \log Q = -20 \text{ dB}$ , on déduit  $\log Q = 1$  soit  $Q = 10$ . On peut aussi utiliser le fait que  $G_{\text{TBF}} = 0$  lorsque  $x = Q$ , ou encore exprimer la valeur exacte de  $|H(x=1)|$  en fonction de  $Q$ .

Bien que le filtre soit d'ordre 2, il n'a pas d'asymptote de pente  $\pm 40 \text{ dB/décade}$  : cela n'a rien de contradictoire, et vient ici du fait qu'on mesure la sortie aux bornes d'une association de dipôles.

**4** La question n'est pas simple : changer  $R$  modifie la valeur de  $Q$ , mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle constraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 7.



**Figure 7 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC.** Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en déivateur.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquences du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que  $x = 1 \cdot 10^{-3}$ , alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 7, et la deuxième à la courbe orange.

### Exercice 12 : Opérateur retard

oral banque PT | 3 | 2

- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Tracé d'un diagramme de Bode.

**1** Pour le signal considéré, la sortie s'écrit

$$s(t) = E \cos(\omega(t - \tau)).$$

En représentation complexe,

$$\underline{s} = E e^{j\omega(t-\tau)} = \underbrace{E e^{j\omega t}}_{=e} e^{-j\omega\tau} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}_0(j\omega) = e^{-j\omega\tau}}.$$

On en déduit

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |e^{j\omega\tau}| = 20 \log 1 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg e^{j\omega\tau} = \omega\tau.$$

Le gain est constamment nul et la phase croît linéairement avec la pulsation.

**2** Notons  $\underline{u}_C$  la tension aux bornes du condensateur. La bobine de droite et la résistance sont parcourues par le même courant, donc par un pont diviseur de tension

$$\frac{\underline{s}}{\underline{u}_C} = \frac{R}{R + jL\omega}.$$

La bobine de gauche forme également un pont diviseur avec l'association des trois autres dipôles, qui a pour admittance

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}.$$

**Attention !** La bobine de gauche et le condensateur ne sont pas traversés par le même courant, et ne forment donc pas un pont diviseur de tension !

Par un pont diviseur,

$$\frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{jL\omega + \underline{Z_{\text{éq}}}} = \frac{1}{1 + jL\omega \underline{Y_{\text{éq}}}}$$

et on en déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} \times \frac{\underline{s}}{\underline{u_C}} = \frac{1}{1 + jL\omega \underline{Y_{\text{éq}}}} \times \frac{R}{R + jL\omega}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1}{1 + (j\omega)^2 LC + \frac{jL\omega}{R + jL\omega}} \times \frac{R}{R + jL\omega} \\ &= \frac{R}{R + 2jL\omega + (j\omega)^2 RLC + (j\omega)^3 L^2 C} \\ \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{2L}{R} + (j\omega)^2 LC + (j\omega)^3 \frac{L^2 C}{R}}}. \end{aligned}$$

**3** Pour pouvoir identifier facilement les deux fonctions de transfert, le plus simple est d'écrire  $\underline{H}_0$  sous la forme

$$\underline{H}_0(j\omega) = \frac{1}{e^{j\omega\tau}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau + (j\omega)^2 \frac{\tau^2}{2}}.$$

Il est également possible de faire un développement limité de chaque fonction de transfert en utilisant pour  $\underline{H}$  un développement du type  $1/(1+x)$  ... mais gérer la cohérence des ordres du développement limité est plus compliqué.

Pour que les dénominateurs des fonctions de transfert  $\underline{H}_0$  et  $\underline{H}$  s'identifient aux deux premiers ordres, il faut que

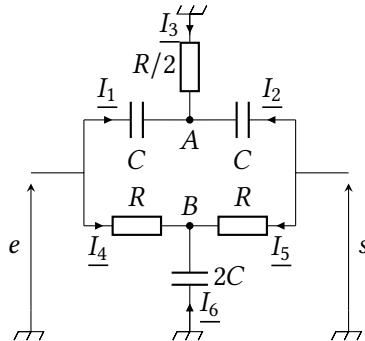
$$\begin{cases} \tau = \frac{2L}{R} \\ \frac{\tau^2}{2} = LC \end{cases} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \frac{4L^2}{R^2} = LC \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{2L}{C}}}$$

et le retard induit par le filtre a alors pour expression

$$\boxed{\tau = \frac{2L}{R}}.$$

**Exercice 13 : Filtre en double T**

- 
- ▷ Fonction de transfert ;
  - ▷ Bande passante.

**Figure 8 – Filtre coupe-bande en double T.**

**1** À basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. On déduit alors de la loi des nœuds que le courant entrant dans le filtre est le même que celui traversant les deux résistances et le même que le courant sortant du filtre. Or par hypothèse le filtre est utilisé en sortie ouverte, donc aucun courant ne sort du filtre. On en déduit qu'aucun courant ne parcourt les résistances, et la loi d'additivité des tensions appliquée à la maille incluant les résistances permet d'écrire

$$e + R \times 0 + R \times 0 = s \quad \text{donc} \quad s = e$$

Ainsi, **les signaux basse fréquence sont transmis par le filtre.**

À très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils. La loi d'additivité des tensions appliquée à la maille incluant les condensateurs permet d'écrire

$$e + 0 + 0 = s \quad \text{donc} \quad s = e$$

Ainsi, **les signaux haute fréquence sont eux aussi transmis par le filtre.**

Ainsi, le filtre a pour rôle d'éliminer une bande de fréquence intermédiaire : il s'agit d'un **filtre coupe-bande**.

**2** Au nœud A,

$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0 \quad \text{d'où} \quad jC\omega(\underline{E} - \underline{V_A}) + jC\omega(\underline{S} - \underline{V_A}) + \frac{2}{R}(0 - \underline{V_A}) = 0$$

ce qui donne

$$\underline{V_A} = \frac{jRC\omega(\underline{E} + \underline{S})}{2(1 + jRC\omega)}$$

En procédant de même au nœud B,

$$\frac{1}{R}(\underline{E} - \underline{V_B}) + \frac{1}{R}(\underline{S} - \underline{V_B}) + 2jC\omega(0 - \underline{V_B}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{V_B} = \frac{\underline{E} + \underline{S}}{2(1 + jRC\omega)}.$$

**3** D'après la loi des nœuds appliquée en sortie du filtre, supposé en sortie ouverte donc sans courant de sortie,

$$\underline{I_2} + \underline{I_5} = 0 \quad \text{soit} \quad jC\omega(\underline{V_A} - \underline{S}) + \frac{1}{R}(\underline{V_B} - \underline{S}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{S} = \frac{\underline{V_B} + jRC\omega \underline{V_A}}{1 + jRC\omega}$$

En reprenant les expressions de  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_B$ ,

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega} \underline{V}_A + \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} \underline{V}_B \\ &= \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega} \frac{\mathrm{j}RC\omega(\underline{E} + \underline{S})}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)} + \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} \frac{\underline{E} + \underline{S}}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)} \\ &= \frac{(\mathrm{j}RC\omega)^2}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2} (\underline{E} + \underline{S}) + \frac{1}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2} (\underline{E} + \underline{S}) \\ \underline{S} &= \frac{1 - (RC\omega)^2}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2} (\underline{E} + \underline{S})\end{aligned}$$

Séparons maintenant  $\underline{E}$  et  $\underline{S}$ ,

$$\left[ 1 - \frac{1 - (RC\omega)^2}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2} \right] \underline{S} = \frac{1 - (RC\omega)^2}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2} \underline{E}$$

ce qui donne en réduisant au même dénominateur et en simplifiant par ce dénominateur

$$[2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2 - 1 + (RC\omega)^2] \underline{S} = [1 - (RC\omega)^2] \underline{E}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1 - (RC\omega)^2}{2(1+\mathrm{j}RC\omega)^2 - 1 + (RC\omega)^2} \\ &= \frac{1 - (RC\omega)^2}{2(1+2\mathrm{j}RC\omega - RC\omega^2) - 1 + (RC\omega)^2} \\ \underline{H} &= \frac{1 - RC\omega^2}{1 + 4\mathrm{j}RC\omega - (RC\omega)^2}\end{aligned}$$

On identifie enfin avec la forme proposée par l'énoncé,

$$\underline{H}(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j} \frac{x}{Q}},$$

qui implique nécessairement de poser  $x = RC\omega$ , d'où on déduit

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}.}$$

**4** On a directement

$$|\underline{H}(1)| = 0 \quad \text{donc} \quad x_c = 1.$$

Un signal d'entrée de pulsation  $\omega_c = 1/RC$  est donc complètement coupé par le filtre.

$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi f_c R} = 3,2 \mu\text{F}.}$$

**5** Réécrivons d'abord la fonction de transfert :

$$\underline{H}(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j} \frac{x}{Q}} \times \frac{\frac{Q}{\mathrm{j}x}}{\frac{Q}{\mathrm{j}x}} = \frac{\mathrm{j}Q \left( x - \frac{1}{x} \right)}{1 + \mathrm{j}Q \left( x - \frac{1}{x} \right)}.$$

En généralisant la définition de la bande passante, on peut définir la bande coupée du filtre comme l'intervalle de fréquence pour lequel  $|\underline{H}(\omega)| \leq H_{\max}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ . Les pulsations de coupure  $x_{\pm}$  sont donc telles que

$$|\underline{H}(x)|^2 = \frac{1}{2} = \frac{Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

ce qui amène à l'équation

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \quad \text{donc} \quad x^2 \pm \frac{1}{Q} x - 1 = 0$$

Ce polynôme admet comme discriminant  $4 + 1/Q^2 > 0$ , donc les solutions mathématiques de l'équation de départ sont

$$x = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right).$$

Les solutions physiques correspondant aux pulsations de coupure sont les deux solutions positives parmi les quatre. Comme

$$\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} > \sqrt{\frac{1}{Q^2}} = \frac{1}{Q}$$

on en déduit qu'il s'agit de

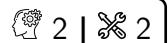
$$x_{\pm} = \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{Q} \quad \text{d'où} \quad f_{\pm} = f_0 \left( \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{Q} \right).$$

La bande coupée  $\Delta f = f_+ - f_-$  vaut donc

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 200 \text{ Hz}.}$$

Le filtre est donc assez peu sélectif, et atténue une large bande de fréquence. Il n'est utilisable que si le signal d'intérêt est de fréquence nettement supérieure à 50 Hz.

### Exercice 14 : Conception d'un filtre de signaux acoustiques



► Diagramme de Bode.

- 1** Le gabarit du filtre est représenté figure 9. La condition sur le gain nominal permet d'éliminer la zone colorée en bleu. La contrainte sur les basses fréquences permet d'éliminer la zone en jaune. La contrainte sur les hautes fréquences permet enfin d'éliminer la zone colorée en rouge.

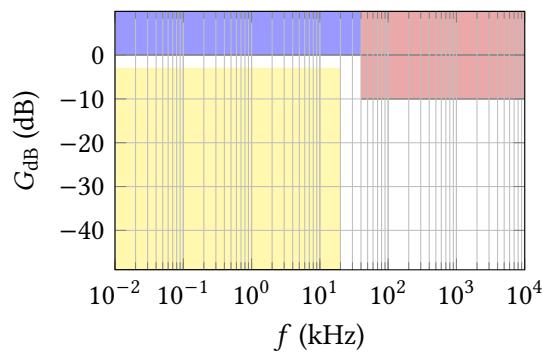


Figure 9 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques. Version couleur sur le site de la classe.

- 2.a** Pour un filtre passe bas du premier ordre, le diagramme de Bode en gain a une **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente -20 dB/décade dans la limite très haute fréquence**. Pour  $f = f_c$ ,  $\underline{H} = 1/(1 + j)$  donc  $|\underline{H}| = 1/\sqrt{2}$  et  $G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}$ .

**2.b** Pour savoir si ce filtre peut satisfaire au cahier des charges, il faut superposer sa courbe de gain au gabarit du filtre et vérifier qu'elle n'empêche pas sur les zones interdites du gabarit. On voit que **ce n'est pas le cas** : la courbe de gain passe dans la zone représentée en rouge sur le gabarit, signe que le passe-bas d'ordre 1 n'atténue pas suffisamment les fréquences proches de 40 kHz. Pour éviter cela, il faut que l'asymptote très haute fréquence soit plus inclinée. Or la pente est d'autant plus élevée que l'ordre du filtre est élevé : utiliser un filtre d'ordre supérieur devrait permettre de résoudre le problème.

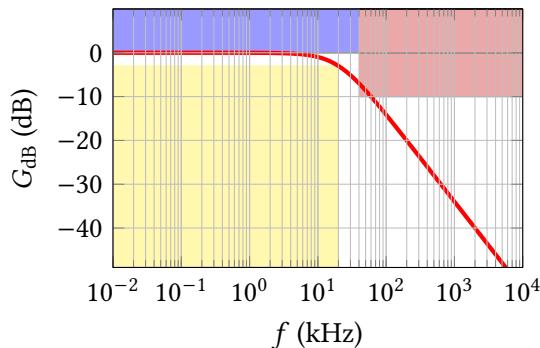


Figure 10 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe en gain d'un passe-bas d'ordre 1.

**3.a** La courbe de gain d'un filtre passe-bas du second ordre **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente  $-40 \text{ dB/décade}$  dans la limite très haute fréquence**. Par contre, il peut présenter une résonance au voisinage de sa fréquence centrale. Pour voir s'il peut satisfaire au cahier des charges, on superpose sur la figure 11 le diagramme asymptotique au gabarit, ce qui permet de voir que le diagramme asymptotique est complètement compris dans la zone permise du gabarit. Ainsi, **ce filtre peut potentiellement satisfaire au cahier des charges**.

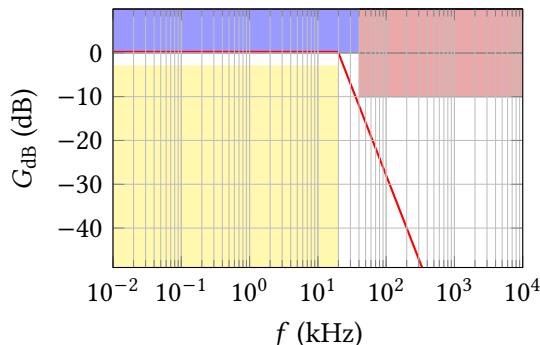


Figure 11 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe asymptotique en gain d'un passe-bas d'ordre 2.

**3.b** Lorsque  $f = f_c$ , c'est-à-dire  $x = 1$ ,

$$\underline{H} = \frac{1}{j/Q} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log Q.$$

À la fréquence de coupure, il faut

$$-3 \text{ dB} \leq G_{\text{dB}} \leq 0 \text{ dB} \quad \text{soit} \quad 10^{-3/20} \leq Q \leq 10^0 \quad \text{et} \quad 0,71 \leq Q \leq 1$$

Notons que si  $Q > 1/\sqrt{2}$  il y a résonance, c'est-à-dire que la fonction de transfert passe par un maximum pour  $f_r < f_0$ , de gain supérieur au gain nominal. La courbe de gain empiète alors sur la zone interdite bleue du gabarit. Cependant, le gain nominal n'est pas forcément le gain maximal autorisé, mais plutôt la valeur asymptotique : on peut penser qu'une résonance large et peu marquée est acceptable.

## Problème ouvert

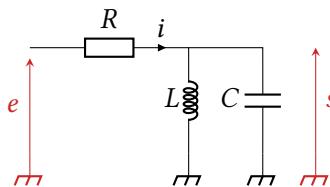
### Exercice 15 : Dipôles masqués

oral CCINP MP | 3 | 1



► *Problème ouvert.*

- Comme le courant dans le circuit est non nul en régime continu, alors le condensateur est forcément monté en parallèle d'un autre dipôle ;
- Comme la tension de sortie est nulle en basse fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes de la bobine ;
- Comme la tension de sortie est nulle en haute fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes du condensateur.
  - ~ Le dipôle  $D_2$  est nécessairement une association parallèle entre la bobine et le condensateur ;
  - ~ Le dipôle  $D_1$  est donc forcément la résistance : s'il s'agissait d'un fil on aurait  $s = e$  à toute fréquence ;
  - ~ Le montage est donc celui de la figure 12.



**Figure 12 – Les dipôles démasqués !.**

- **Analyse en régime continu :** la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la résistance est directement égale à  $E$ , d'où avec la loi d'Ohm

$$E = RI \quad \text{soit} \quad R = \frac{E}{I} = 3 \text{ k}\Omega .$$

- **Analyse en régime sinusoïdal :** l'admittance équivalente de l'association de la bobine et du condensateur est

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega .$$

Avec un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega} .$$

On peut donc identifier avec la forme canonique donnée,

$$\begin{cases} \frac{R}{jL\omega} = -\frac{jQ\omega_0}{\omega} \\ jRC\omega = jQ\frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Q\omega_0 = \frac{R}{L} \\ \frac{Q}{\omega_0} = RC \end{cases}$$

D'après les valeurs expérimentales,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 5 .$$

On en déduit

$$L = \frac{R}{Q\omega_0} = 95 \text{ mH} \quad \text{et} \quad C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ F} .$$