

Circuit fixe dans un champ variable

Plan du cours

I	Loi de Faraday	1
I.A	Mise en évidence expérimentale	1
I.B	Flux magnétique et force électromotrice induite	2
I.C	Loi qualitative de Lenz	4
II	Auto-induction	4
II.A	Flux propre et inductance propre	4
II.B	Énergie magnétique	5
III	Induction mutuelle	7
III.A	Mise en évidence expérimentale	7
III.B	Inductance mutuelle	7
III.C	Loi de comportement de deux bobines couplées	8
III.D	Énergie magnétique en présence de couplage inductif	10

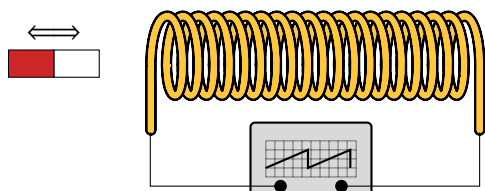
- | | |
|--|---|
| (R) Résultat à connaître par cœur. | (M) Méthode à retenir, mais pas le résultat. |
| (D) Démonstration à savoir refaire. | (Q) Aspect qualitatif uniquement. |

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les phénomènes d'induction dans les circuits immobiles soumis à un champ magnétique dépendant du temps : on parle alors d'**induction de Neumann** (ou cas de Neumann). La situation « symétrique » d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique stationnaire sera étudiée au chapitre suivant.

I - Loi de Faraday

I.A - Mise en évidence expérimentale



Observations :

- Aimant au repos à côté de la bobine :
- Aimant en mouvement vers la bobine :
- Aimant au repos à l'intérieur de la bobine :
- Aimant en mouvement vers l'extérieur de la bobine :

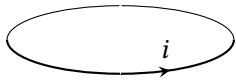
Interprétation : l'apparition d'une tension n'est pas liée à l'existence du champ magnétique créé par l'aimant, mais à la *variation* de la « quantité de champ magnétique » traversant la bobine.

La tension due au mouvement de l'aimant est appelée **force électromotrice induite**. Quand le circuit est fermé, il en résulte un courant appelé **courant induit**.

I.B - Flux magnétique et force électromotrice induite

I.B.1 - Flux magnétique au travers d'un circuit plan

(R)

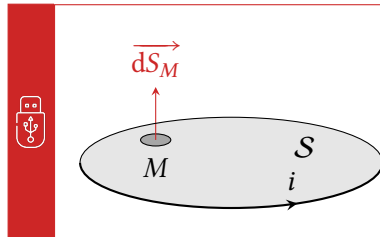


Considérons un circuit C , orienté par le sens du courant. Par convention, le **vecteur normal** $\vec{n}$ à ce circuit est le vecteur unitaire orthogonal au plan du circuit orienté par la règle de la main droite par rapport au sens conventionnel du courant.

⚠⚠⚠ **Attention !** Pour que $\vec{n}$ soit défini, il faut donc **d'abord** orienter le courant.

⚠⚠⚠ **Attention !** Le sens du courant qui intervient dans la définition est son sens d'algébrisation conventionnelle, qui ne dit rien sur son sens réel : l'intensité peut être positive ou négative ... sans que cela ne change quoi que ce soit à $\vec{n}$.

(R)



On appelle **flux magnétique** au travers d'un circuit

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M \quad \text{avec} \quad d\vec{S}_M = dS_M \vec{n},$$

où S désigne la surface du circuit, dS_M l'élément de surface centré sur M et $\vec{n}$ le vecteur normal au circuit.

Qualitativement, le flux magnétique peut s'interpréter comme « le nombre » de lignes de champ magnétique qui traversent le circuit, voir figure 1.

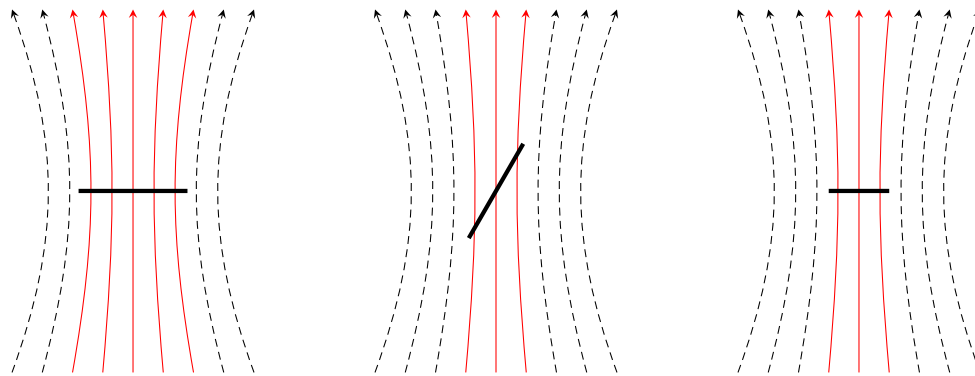
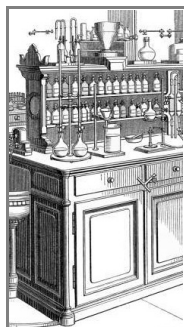


Figure 1 – Flux magnétique et lignes de champ. Le trait épais symbolise le circuit vu de côté.

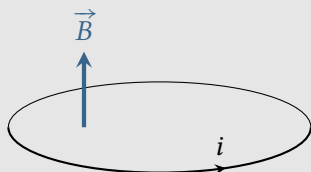
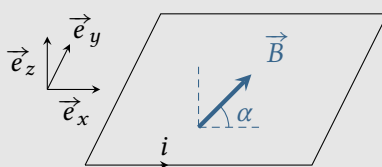
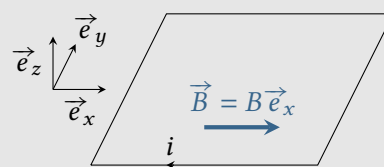
Remarque : on a naturellement $[\Phi] = T \cdot m^2$, que l'on exprime occasionnellement avec une unité dédiée appelée le Weber Wb.



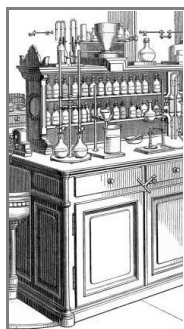
Un peu d'histoire : Wilhelm Eduard Weber est un physicien allemand né en 1804 à Wittenberg et mort en 1891 à Göttingen. Spécialiste de l'électromagnétisme, il collabore étroitement avec Carl Friedrich Gauss pour établir des méthodes de mesure absolues des phénomènes électriques et magnétiques. Ensemble, ils mettent au point un système d'unités fondé sur les grandeurs mécaniques, permettant d'exprimer le courant, la charge et le potentiel sans recourir à des références arbitraires. Weber formule également des lois dynamiques reliant forces électriques et mouvement des charges, anticipant certains aspects de la théorie électromagnétique. En acoustique, il étudie les vibrations des milieux élastiques, la propagation des ondes sonores et les mécanismes de l'audition, contribuant à une approche quantitative des phénomènes sonores.

Application 1 : Calculs de flux

Calculer le flux magnétique au travers des circuits suivants, plongés dans un champ uniforme à l'échelle du circuit.

(a) Spire circulaire de rayon R (b) Spire carrée de côté a (c) Spire carrée de côté a 

I.B.2 - Loi de Faraday

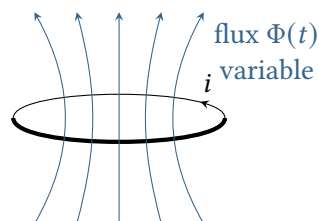


Un peu d'histoire : Michael Faraday est un savant britannique né en 1791 à Newington Butts et mort en 1867 à Hampton Court. Autodidacte, il devient une figure majeure de l'électromagnétisme expérimental. Il découvre l'induction électromagnétique, et invente la cage de Faraday, une enceinte permettant de bloquer les champs électriques externes. Il formalise également les notions de champ et de lignes de champ, renouvelant profondément la compréhension des interactions électriques et magnétiques. Ses travaux en chimie l'amènent à mettre en évidence les lois de l'électrolyse, et à introduire une partie du vocabulaire de l'oxydoréduction (ion, anode, cathode), mais aussi à découvrir le benzène. Excellent pédagogue, il donne des conférences publiques très populaires, contribuant à la diffusion des sciences auprès d'un large public.

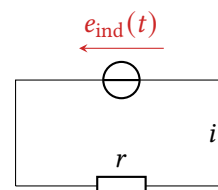
Les variations de flux magnétique Φ au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un **générateur induit** dans le circuit, dont la **force électromotrice (fém) induite** e_{ind} est reliée au flux magnétique Φ au travers du circuit par

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Le générateur induit doit être orienté en convention générateur par rapport à i .



vision magnétique

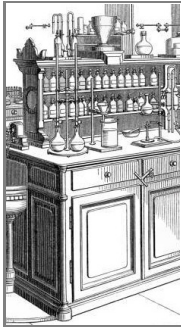


vision électrique

Le générateur induit est un modèle équivalent (« tout se passe comme si »), dont on peut voir et mesurer les conséquences (mise en mouvement d'une partie mobile, courant induit, etc.) mais dont la fém n'est pas toujours directement mesurable.

⚡⚡⚡ Attention ! Le respect des conventions d'orientation est crucial pour la bonne mise en équation d'un problème d'induction. Ainsi, la première étape dans tout exercice consiste à flécher le sens conventionnel du courant ... tout en se rappelant qu'il ne s'agit que d'un sens conventionnel, l'intensité pouvant être algébrique.

I.C - Loi qualitative de Lenz



Un peu d'histoire : Heinrich Lenz est un physicien né en 1804 à Tartu, en Estonie, et mort en 1865 à Rome. Professeur à Saint-Petersbourg, il contribue au développement de la physique expérimentale au XIXe siècle et à la structuration des lois de l'électromagnétisme. Il est surtout connu pour la loi de Lenz, qui précise le sens des courants induits en électromagnétisme, en lien avec les travaux de Michael Faraday. Il étudie aussi la conductivité des métaux et la variation de la résistance électrique avec la température, établissant des relations expérimentales précises. Entre 1829 et 1830, il participe à une expédition scientifique de l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg dans le Caucase, sur les rives de la mer Caspienne et jusqu'en Perse, où il réalise des mesures de champ magnétique terrestre et de température dans des conditions de froid extrême.

(R)



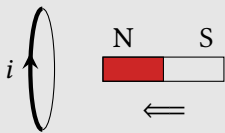
Loi de Lenz

Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes.

En pratique, la cause est toujours la variation du flux magnétique au travers du circuit, les phénomènes d'induction tendant à atténuer ces variations de flux.

(M)

Application 2 : Mise en évidence de la loi de Lenz



Un aimant est progressivement rapproché d'une spire conductrice de résistance r . Déterminer le signe de i (ou de manière équivalente le sens réel du courant) lors de l'opération, d'abord en raisonnant par la loi de Lenz puis en retrouvant le résultat avec la loi de Faraday.

On rappelle que les lignes de champ magnétique créées par un aimant partent du pôle Nord pour aboutir au pôle Sud, et que le champ est plus intense à proximité de l'aimant.

II - Auto-induction

Un circuit parcouru par un courant crée un champ magnétique, dont le flux au travers du circuit lui-même est non nul, et peut donc causer des phénomènes inductifs : on parle alors d'**auto-induction**. Ces phénomènes existent dans tous les circuits, mais ne jouent un rôle prépondérant que dans les bobines où les nombreuses spires enroulées permettent d'amplifier leur effet. Ils sont négligeables dans la plupart des autres cas.

II.A - Flux propre et inductance propre

Pour étudier les phénomènes inductifs dans un circuit, on distingue le **champ propre**, c'est-à-dire le champ magnétique créé par le circuit lui-même, du **champ extérieur**, créé par les autres sources à proximité (autre circuit, aimant, etc.) Le **flux propre** Φ_p est le flux du champ propre au travers du circuit lui-même. Le champ propre étant proportionnel au courant i dans le circuit, le flux propre est également proportionnel à i .

(R)



On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur L telle que

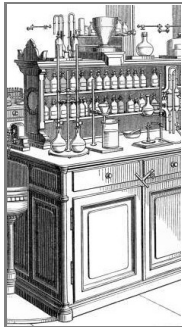
$$\Phi_p = Li,$$

où i est l'intensité traversant la bobine.

L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie de la bobine.

En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité qui la traverse.

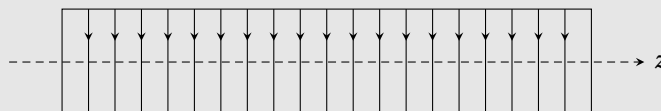
L'inductance propre s'exprime en Henry : $[L] = \text{H}$.



Un peu d'histoire : Joseph Henry est un physicien américain né en 1797 à Albany et mort en 1878 à Washington. Il est l'un des pionniers de l'électromagnétisme expérimental. Ses travaux mettent en évidence le phénomène d'auto-induction et améliorent la conception des électroaimants, avec des applications importantes dans le développement du télégraphe électrique. Il réalise aussi des expériences sur la transmission des signaux électriques à distance, anticipant certaines idées de la télécommunication moderne. Professeur au College of New Jersey (future Princeton University), il contribue fortement à l'organisation et la structuration de la recherche en physique américaine du XIXe siècle. En 1846, il devient le premier secrétaire du Smithsonian Institution, où il organise la recherche scientifique et la diffusion des connaissances.

Application 3 : Inductance propre d'un solénoïde infini

Considérons une bobine de longueur ℓ très supérieure à son rayon, contenant N spires montées en série, d'axe $\vec{e}_z$ et de surface S . La bobine est parcourue par un courant i .

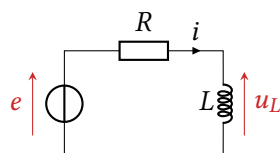


- 1 - On modélise la bobine par un solénoïde infini : que néglige-t-on ? Rappeler l'expression du champ magnétique.
- 2 - Calculer le flux φ au travers d'une spire de la bobine. En déduire le flux propre Φ_p , puis l'expression de l'auto-inductance L .
- 3 - Retrouver la loi de comportement de la bobine telle que vous la connaissez.

Remarques : Une spire parcourue par un courant i créant un champ $B \propto i$, une bobine de N spires crée donc $B \propto Ni$. Ainsi, le flux au travers d'une spire $\varphi \propto Ni$ et on a alors toujours $\Phi_p \propto N^2 i$ et donc $L \propto N^2$. L'expression de L permet d'identifier facilement l'unité usuelle de μ_0 : $[\mu_0] = \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.B - Énergie magnétique

Raisonnons pour l'établir sur un exemple simple, celui du circuit RL série.



Équation électrique :

Espace 1

Bilan de puissance :

Espace 2

Au contraire de la puissance reçue par la résistance, la puissance reçue par la bobine s'écrit comme la dérivée d'une certaine fonction, qui peut s'interpréter comme l'énergie stockée dans la bobine.

Bilan d'énergie : entre deux instants t_1 et t_2 ,

Espace 3

Même conclusion que pour le bilan de puissance : le travail électrique reçu par la bobine entre deux instants s'écrit comme la différence d'énergie stockée dans la bobine entre ces deux instants, quelle que soit la façon dont les échanges d'énergie ont eu lieu.

Comment l'énergie est-elle stockée ?

Espace 4

(R)



Le champ magnétique créé par une bobine lui permet de stocker de l'énergie.

L'énergie magnétique stockée par une bobine est reliée à son inductance par

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L i^2 .$$

► **Pour approfondir :** Partant de cette expression, il est possible d'établir une expression de l'énergie magnétique en fonction de B . Raisonnons sur un solénoïde de grande longueur, pour lequel on a

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z \quad \text{et} \quad L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S .$$

Faisons apparaître B dans l'énergie magnétique :

$$E_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i^2 = \frac{1}{2 \mu_0} \left(\frac{\mu_0 N i}{\ell} \right)^2 \ell S = \frac{B^2}{2 \mu_0} S \ell$$

En reconnaissant le volume du solénoïde $V = S \ell$, cette expression permet d'identifier une énergie magnétique par unité de volume,

$$u_{\text{magn}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

et d'aboutir à une expression qui se généralise à un volume $\mathcal{V}$ et un champ $\vec{B}$ quelconques,

$$E_{\text{magn}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{B(M)^2}{2 \mu_0} dV .$$

Cette expression montre notamment que l'énergie magnétique est toujours positive. Vous la retrouverez l'année prochaine en la reliant aux équations fondamentales de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell. ■

III - Induction mutuelle

III.A - Mise en évidence expérimentale

Plaçons deux bobines l'une à côté de l'autre, comme schématisé figure 2. La bobine ① est alimentée par une tension sinusoïdale, la bobine ② n'est pas alimentée, mais on observe la tension à ses bornes à l'oscilloscope.

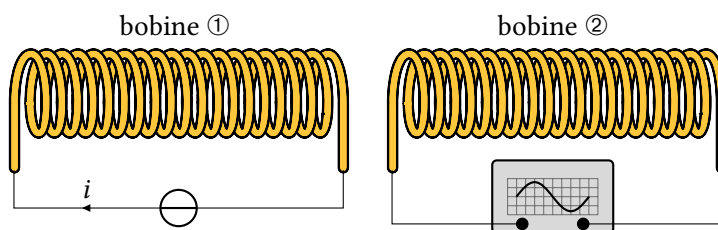


Figure 2 – Mise en évidence expérimentale du phénomène d'auto-induction.

Observation : apparition d'une tension aux bornes de la bobine ②, oscillant à la même fréquence que la tension imposée à la bobine ①, et d'amplitude d'autant plus grande que les bobines sont proches.

Interprétation :

Espace 5

→ on dit qu'il y a **couplage inductif** entre les deux bobines.

III.B - Inductance mutuelle

Considérons le cas plus général où les deux bobines ① et ② sont parcourues toutes les deux par des courants i_1 et i_2 , et créent chacune un champ magnétique. On suppose qu'il n'y a pas d'autre champ extérieur.

III.B.1 - Définition

Flux total au travers de la bobine ① :

Espace 6

Le champ créé par une bobine est proportionnel au courant qui la parcourt, il en est donc de même pour le flux.

Le flux créé par une bobine ② au travers d'une bobine ① est proportionnel au courant i_2 :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

Le coefficient M est appelé **inductance mutuelle** ou **coefficient d'induction mutuelle**.

Il dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines,
mais pas du tout des courants qui les parcourent.

Il peut être positif ou négatif, en fonction des conventions d'orientation choisies.

L'inductance mutuelle s'exprime en Henry : $[M] = \text{H}$.

De façon absolument pas intuitive, c'est le même coefficient M qui permet de décrire le couplage réciproque :

$$\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \end{cases}$$

Ce résultat constitue le **théorème de Neumann**, qui se démontre avec des outils très éloignés du programme.

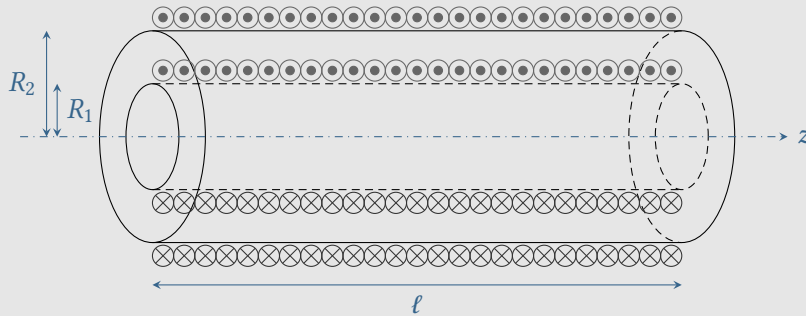
III.B.2 - Calcul d'un coefficient d'induction mutuelle

M

Application 4 : Solénoïdes imbriqués

Deux solénoïdes S_1 et S_2 de même axe (Oz) , de grande longueur ℓ , de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et possédant respectivement N_1 et N_2 spires sont imbriqués l'un dans l'autre, comme schématisé ci-dessous. Ils sont parcourus par des courants i_1 et i_2 .

Calculer de deux manières différentes l'inductance mutuelle M entre ces deux solénoïdes.



Remarque : Un bobinage de N_1 spires crée un champ $B \propto N_1 i$, donc au travers d'une spire d'un second bobinage de N_2 spires $\varphi_{1 \rightarrow 2} \propto N_1 i$ d'où $\Phi_{1 \rightarrow 2} \propto N_1 N_2 i$ et $M \propto N_1 N_2$.

III.B.3 - Circuits en influence totale

Deux circuits sont dits **en influence totale** lorsque toutes les lignes de champ créées par l'un passent au travers de l'autre.

M

Application 5 : Solénoïdes imbriqués en influence totale

Q

- 1 - À quelle condition les deux solénoïdes de l'application précédente sont-ils en influence totale ?
- 2 - Montrer que dans ce cas l'inductance mutuelle s'exprime simplement en fonction des inductances propres des deux solénoïdes.

Q

⇒ **Généralisation :** on a toujours

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2},$$

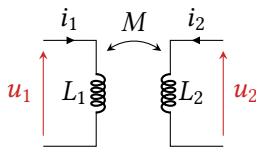
le maximum étant atteint lorsque les circuits sont en influence totale.

Démonstration physique :

Espace 7

III.C - Loi de comportement de deux bobines couplées

Espace 8



En présence de couplage inductif, les lois de comportement des bobines ne s'écrivent pas sous la forme habituelle « $u = L \frac{di}{dt}$ » mais impliquent les intensités dans les deux circuits couplés.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

R

Application 6 : Modélisation simplifiée d'un transformateur

M

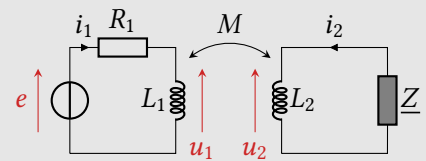
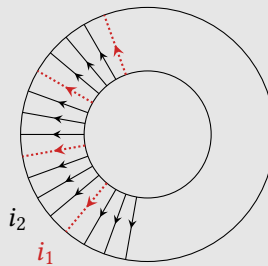
Un transformateur est constitué de deux bobinages indépendants électriquement, contenant respectivement N_1 et N_2 spires, enroulés de façon à se rapprocher le plus possible de la situation d'influence totale. Sur le schéma central, les spires du bobinage ①, appelé bobinage primaire, sont représentées en traits pointillés et les spires bobinage ②, dit bobinage secondaire, en traits pleins : avec ce schéma, on aurait $N_2 = 3N_1$.

Les inductances L_1 , L_2 et M , et dépendent des nombres de spires par des résultats voisins de ceux établis pour les solénoïdes imbriqués :

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 \lambda \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 \lambda \quad M = \mu_0 N_1 N_2 \lambda$$

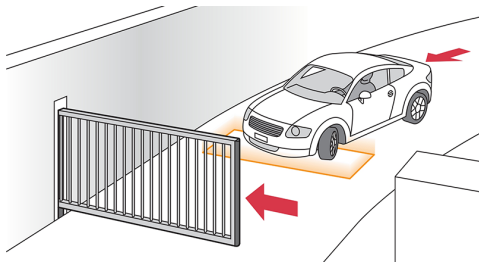
où λ est une constante homogène à une longueur dépendant de la géométrie du transformateur.

Une tension sinusoïdale e est imposée au primaire au travers d'une résistance R_1 alors que le secondaire sert à alimenter une charge d'impédance Z .



- 1 - Exprimer en toute généralité les tensions complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ en fonction de $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$.
- 2 - Déterminer le rapport de transformation m , égal à $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ lorsque le secondaire est en sortie ouverte.
- 3 - Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur, c'est-à-dire l'impédance équivalente vue du primaire, lorsqu'il débite dans une charge $\underline{Z}$ quelconque.

Remarque culturelle : Au delà du transformateur, de nombreuses autres applications reposent sur les mêmes principes. C'est le cas des détecteurs de métaux au sens large, par exemple pour la détection automatique de véhicules, à un feu rouge ou pour l'ouverture d'une barrière.

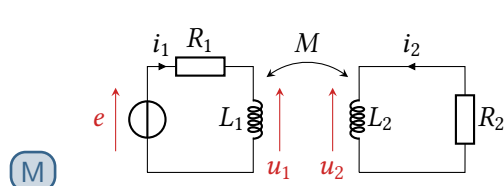


Source image : <https://www.accor-solutions.com>

Le bobinage primaire alimenté par une tension sinusoïdale se trouve dans le sol, et lorsqu'un véhicule se place au dessus des courants (appelés courants de Foucault) apparaissent dans la carcasse du véhicule. Ce dernier joue alors un rôle analogue au bobinage secondaire du transformateur, qui modifie en retour l'impédance apparente du bobinage primaire. Détecter cette variation d'impédance apparente permet de repérer la présence du véhicule.

III.D - Énergie magnétique en présence de couplage inductif

Raisonnons pour l'établir sur un exemple simple, celui de deux circuits RL série couplés inductivement.



Équations électriques :

Espace 9

Bilan de puissance :

Espace 10

→ bien que le circuit ② ne soit pas alimenté, de l'énergie y est dissipée par effet Joule : le couplage inductif permet de réaliser un **transfert d'énergie sans contact**.

L'énergie magnétique stockée dans deux bobines couplées est liée à leurs inductances par

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Le couplage inductif modifie le courant dans les deux bobines, et donc le champ qu'elles créent. Il est donc logique que l'énergie magnétique ne s'écrive pas simplement comme la somme des énergies magnétiques de chaque bobine isolée.

► **Pour approfondir** : Raisonner sur l'énergie magnétique permet de démontrer la relation $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$, que nous n'avons justifié « que » physiquement. En posant $x = i_2/i_1$,

$$E_{\text{magn}} = i_1^2 \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} x^2 + Mx \right) = i_1^2 f(x).$$

Or nous avons expliqué dans l'approfondissement p. 6 que l'énergie magnétique était toujours positive, ce qui implique que la fonction polynômiale du second degré f est de signe constant, donc n'admet au plus qu'une seule racine double. C'est le cas si son discriminant est négatif ou nul,

$$M^2 - 4 \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{2} \leq 0 \quad \text{soit} \quad M^2 \leq L_1 L_2,$$

ce qui est bien le résultat annoncé. ■

Remarque culturelle : Ce principe est à la base du fonctionnement de tous les chargeurs sans fil, ou encore de toutes les cartes magnétiques, p.ex. pour les réseaux de transport en commun. Un bobinage se trouve dans l'appareil de lecture, et un second dans la carte. L'énergie reçue par le bobinage de la carte lui permet d'émettre un signal radio codant le numéro de l'utilisateur et celui de l'abonnement enregistré sur la carte, que reconnaît l'appareil de lecture. Ce processus est appelé RFID, pour Radio-Frequency Identification.

