

Mouvements circulaires

Plan du cours

I D'autres repérages des trajectoires planes	1
I.A Vecteur déplacement élémentaire	1
I.B Cinématique dans la base polaire	2
I.C Cinématique dans la base de Frénet.	5
II Généralisation tridimensionnelle	6
II.A Coordonnées cylindriques : rotation autour d'un axe fixe	6
II.B Coordonnées sphériques : objet à la surface de la Terre	8
III Exemple du pendule simple	8

- | | |
|---|--|
| R Résultat à connaître par cœur. | M Méthode à retenir, mais pas le résultat. |
| D Démonstration à savoir refaire. | Q Aspect qualitatif uniquement. |

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre se focalise sur les mouvements à trajectoires circulaires. Dans pareille situations, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus adaptées : les coordonnées polaires le sont bien davantage ... mais les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont alors moins immédiates.

I - D'autres repérages des trajectoires planes

I.A - Vecteur déplacement élémentaire

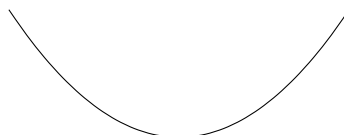
• **Définition**

Le vecteur déplacement entre t et $t + \Delta t$ est défini par

$$\Delta \vec{OM} = \vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t) \stackrel{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}.$$

Le déplacement est qualifié d'**élémentaire** lorsque la durée considérée est infinitésimale. On note alors

$$d\vec{M} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t).$$



Géométriquement, $d\vec{M}$ est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

- **Lien au vecteur vitesse**

Par définition,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

(R)

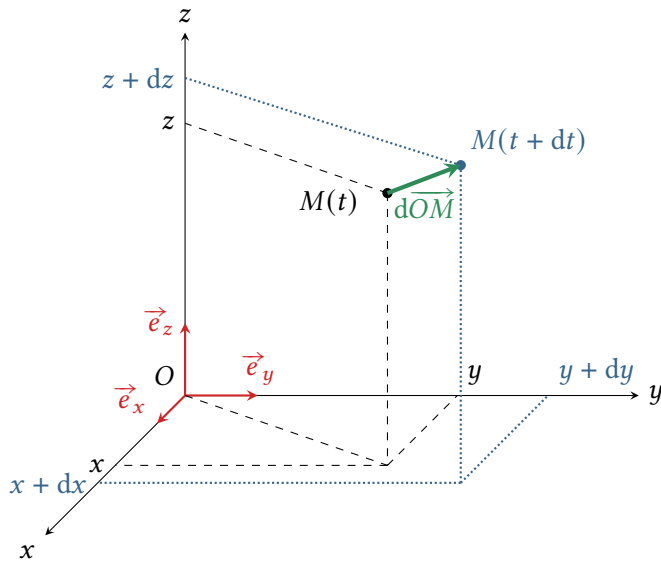


Le vecteur déplacement élémentaire et le vecteur vitesse sont reliés par

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \iff d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt.$$

- **Expression en coordonnées cartésiennes**

Géométriquement : entre t et $t + dt$ les coordonnées du point M sont passées de (x, y, z) à $(x + dx, y + dy, z + dz)$.



$$d\overrightarrow{M} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

Espace 1

À partir du vecteur vitesse :

(R)

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad \text{donc} \quad d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

Espace 2

- **Application à la définition des vecteurs de base**

Soit c une des coordonnées du point M . Par définition, le vecteur de base \vec{e}_c est le vecteur unitaire orienté dans la direction et le sens de $d\overrightarrow{M}$ lorsque seule la coordonnée c varie, toutes les autres restant constantes.

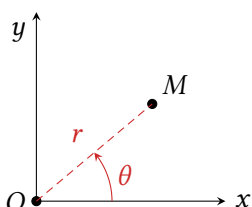
Exemple : si $M(t)$ se déplace en $M(t + dt)$ tel que x augmente de dx avec y et z constants, alors

$$d\overrightarrow{M}_x = dx \vec{e}_x.$$

I.B - Cinématique dans la base polaire

I.B.1 - Coordonnées polaires d'un point

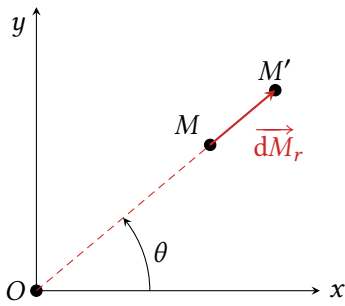
(R)



- ▷ $r = OM \geq 0$: distance à l'origine O ;
- ▷ $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$: angle par rapport à une direction de référence (Ox).

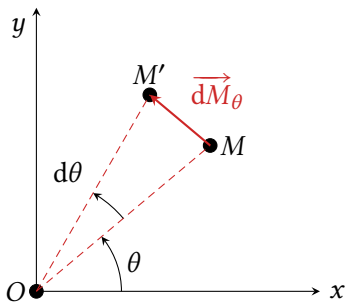
I.B.2 - Base polaire

- Définition des vecteurs de base



Vecteur \vec{e}_r : direction de \overrightarrow{dM}_r déplacement élémentaire lorsque

$$\begin{cases} r \mapsto r + dr \\ \theta \text{ inchangé} \end{cases} \text{ soit } \overrightarrow{dM}_r = dr \vec{e}_r .$$



Vecteur \vec{e}_θ : direction de $\overrightarrow{dM}_\theta$ déplacement élémentaire lorsque

$$\begin{cases} r \text{ inchangé} \\ \theta \mapsto \theta + d\theta \end{cases}$$

Écriture de $\overrightarrow{dM}_\theta$:

puisque $OM = r$ et dans l'approximation des petits angles, $\overrightarrow{dM}_\theta = r d\theta \vec{e}_\theta$.

Espace 3

La **base polaire** est la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
 Il s'agit d'une base orthonormée directe.

Elle est attachée au point M : au contraire de la base cartésienne, c'est une **base locale** ou **mobile**, qui le suit au cours de son mouvement.

(R)

Expression générale du déplacement élémentaire : combinaison d'une variation de chaque coordonnée,

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dM}_r + \overrightarrow{dM}_\theta = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

Espace 4

Le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires est donné par

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

(R)

- Expression des vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

(M)

↪ si θ dépend du temps, alors \vec{e}_r et \vec{e}_θ aussi.

Espace 5

• Dérivation temporelle des vecteurs de base

Approche par le calcul : utilisons la formule de dérivation d'une fonction composée,

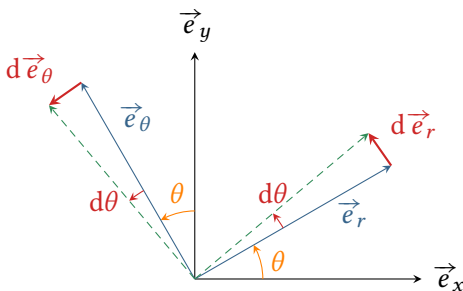
$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} [g(f(x))] = f'(x) \times g'(f(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx} \times \frac{dg}{df}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y = -\dot{\theta} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Espace 6

Approche géométrique :

- ▷ lorsque r varie de dr à $\theta = \text{cte}$, les vecteurs de base ne varient pas ;
- ▷ lorsque θ varie de $d\theta$ à r constant,



\vec{e}_r varie de $d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta$ (car $\|\vec{e}_r\| = 1$)
 \vec{e}_θ varie de $d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r$ (car $\|\vec{e}_\theta\| = 1$)
 d'où $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$

Espace 7

Conclusion : à retenir absolument !!

R

Les vecteurs de la base polaire dépendent du temps, et leurs dérivées sont

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

I.B.3 - Vecteurs cinématiques

R

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$

🔴🔴🔴 **Attention !** Les coordonnées polaires du point M sont (r, θ) , mais les composantes du vecteur position dans la base polaire sont $(r, 0)$: la dépendance en θ est incluse dans la définition des vecteurs de base.

Vecteur vitesse : l'expression générale établie ici n'est pas forcément à mémoriser, il faut en revanche savoir la retrouver dans la situation particulière adaptée à chaque exercice.

- ▷ Utilisation du vecteur déplacement élémentaire :

D

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Espace 8

▷ *Dérivation directe du vecteur position :*

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

D

Espace 9

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Le terme \dot{r} est appelé **vitesse radiale** et $\dot{\theta}$ est la **vitesse angulaire**.

Vecteur accélération : l'expression générale établie ici est peu utile et n'est pas à mémoriser, il faut en revanche savoir la retrouver dans la situation particulière adaptée à chaque exercice.

M

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

Espace 10

Remarque : L'homogénéité ($[a] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) permet de contrôler le nombre de r (un seul) et le nombre de points (deux) de chaque terme.

Application 1 : Vitesse et accélération

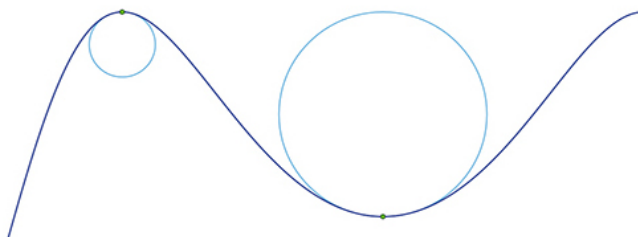
Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération pour les deux mouvements suivants. Établir les résultats par dérivation du vecteur position, mais pas en simplifiant les expressions générales (même si bien sûr ça marcherait !)

- 1 - Mouvement circulaire ($r = R = \text{cte}$) : exprimer d'abord \vec{v} et \vec{a} en fonction de R , θ et ses dérivées, puis exprimer \vec{a} uniquement en fonction de R et de la composante v_θ de la vitesse.
- 2 - Mouvement « spiralaire » : vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$, mais r variable.

M

I.C - Cinématique dans la base de Frénet

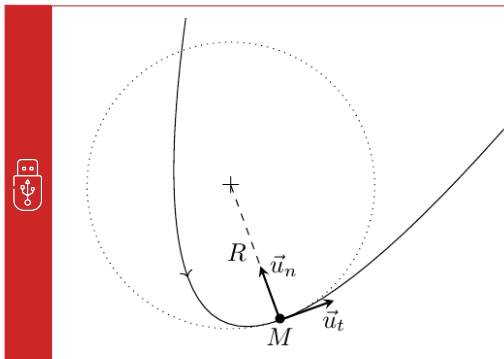
• Cercle osculateur d'une courbe



On appelle **cercle osculateur** d'une courbe C en un point P donné le cercle tangent à cette courbe et qui l'approche au mieux (cf. Wikipédia pour plus de détails mathématiques). Le rayon R du cercle osculateur est appelé **rayon de courbure** de C au point P , et son centre Ω est le **centre de courbure**.

• Base de Frénet

R



La **base de Frénet** (\vec{u}_t, \vec{u}_n) est une base orthonormée locale, définie en tout point M d'une trajectoire plane.

- ▶ \vec{u}_t est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement ;
- ▶ \vec{u}_n est le vecteur unitaire orthogonal à \vec{u}_t orienté vers l'intérieur de la courbure, c'est-à-dire dirigé vers le centre de courbure.

Remarque : les vecteurs unitaires de la base de Frénet sont parfois notés (\vec{t}, \vec{n}) ou $(\vec{\tau}, \vec{n})$.

• Vecteurs cinématiques

Les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frénet se retrouvent en considérant que le mouvement est localement circulaire sur le cercle osculateur.

$$\vec{u}_t \iff \vec{e}_\theta; \vec{u}_n \iff -\vec{e}_r \text{ et } v = \|\vec{v}\| \iff v_\theta$$

Espace 11

R

Les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent dans la base de Frénet

$$\vec{v} = v \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n.$$

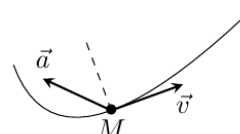
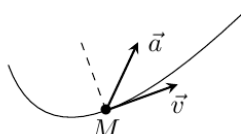
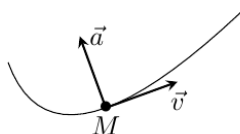
où $v = \|\vec{v}\|$ et R est le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

Remarque : Ces relations montrent très explicitement que $v = \|\vec{v}\| = cte$ n'est pas du tout équivalent à $\vec{a} = \vec{0}$, en raison des changements de direction du vecteur vitesse.

Q

Interprétation géométrique : les projections de \vec{a} sur la base de Frénet donnent des informations qualitatives importantes sur le mouvement.

- ▶ $\vec{a} \cdot \vec{u}_n \geq 0$: l'accélération (et donc la somme des forces !) est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure ;
- ▶ le signe de $\vec{a} \cdot \vec{u}_t$ ou $\vec{a} \cdot \vec{v}$ indique si le mouvement est ralenti (< 0), uniforme ($\vec{a} \perp \vec{v}$) ou accéléré (> 0).



II - Généralisation tridimensionnelle

Les coordonnées polaires définissent un repérage *du plan*, mais il est parfois nécessaire de généraliser au repérage *de l'espace*. On a alors deux possibilités pour la troisième coordonnée : une longueur ou un angle.

II.A - Coordonnées cylindriques : rotation autour d'un axe fixe

La situation typique où les coordonnées cylindriques s'imposent est celle du repérage d'un point appartenant à un solide en rotation autour d'un axe fixe. L'idée consiste à repérer d'une part la position du point sur son cercle trajectoire (coordonnées polaires) et d'autre part sa hauteur le long de l'axe (type coordonnées cartésiennes).

↪ cette idée permet de définir les **coordonnées cylindriques** (r, θ, z) du point M .

⚠⚠⚠ **Attention !** $r = OH \neq OM$, où H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy)

La base cylindrique est une **base locale**, c'est-à-dire qui suit M au cours de son mouvement, mais le vecteur \vec{e}_z est fixe, ce qui simplifie les calculs.

R

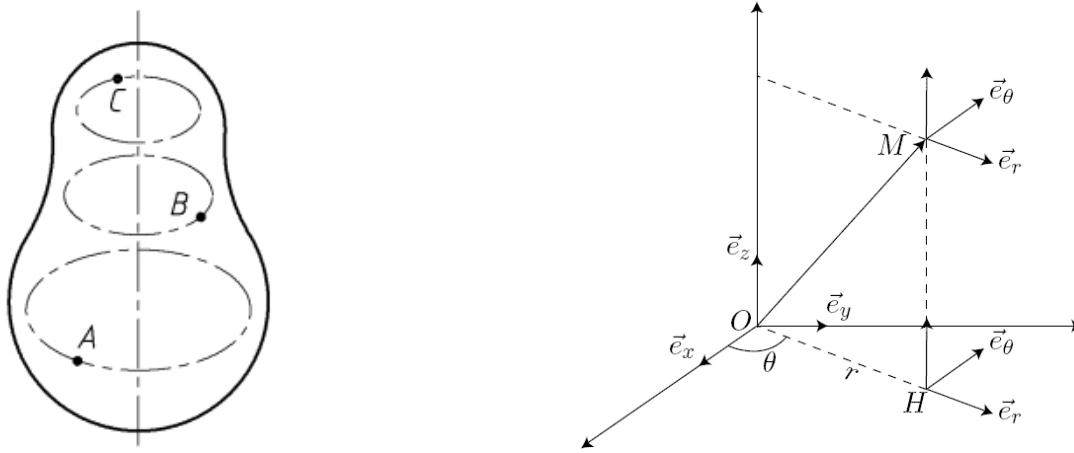


Figure 1 – Coordonnées cylindriques.

Dérivées des vecteurs de base :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$

Espace 12

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z.$$

(R)

Espace 13

Vecteur déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = \underbrace{d\overrightarrow{OH}}_{\text{idem polaires}} + \underbrace{d\overrightarrow{HM}}_{\text{idem cartésiennes}} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

(R)

Espace 14

Les vecteurs cinématiques en coordonnées cylindriques sont donnés par

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

→ qualitativement, comme \vec{e}_z est fixe, il ne « se mélange pas » avec les autres vecteurs dans les calculs.

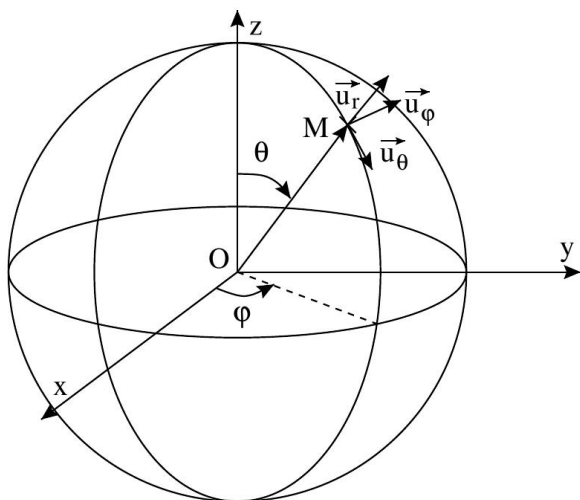
Remarque : comme on pouvait s'y attendre, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires dans le plan $z = 0$.

II.B - Coordonnées sphériques : objet à la surface de la Terre

La situation typique où les coordonnées sphériques s'imposent est celle du repérage d'un objet à la « surface » de la Terre, type bateau ou satellite : plutôt qu'une longueur, la troisième coordonnée est un angle.

→ on définit ainsi les **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) du point M .

Q



- ▷ Rayon $r = OM \geq 0$;
- ▷ Colatitude θ restreint au domaine $[0, \pi]$... et non pas $[0, 2\pi]$;
- ▷ Azimuth $\varphi \in [0, 2\pi[$

Vecteur position : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

Espace 15

Vecteur déplacement élémentaire :

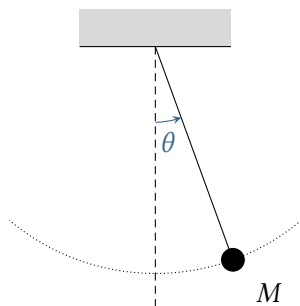
$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

L'expression générale du vecteur accélération existe, mais n'a pas d'intérêt.

Remarque : Plutôt que la colatitude θ , on utilise souvent la latitude λ définie comme l'angle \widehat{HOM} , mesurée depuis un rayon équatorial et non pas depuis l'axe des pôles. Ainsi, $\lambda = \pi/2 - \theta$.

► **Pour approfondir :** La restriction du domaine de définition de θ est nécessaire pour éviter une redondance dans la définition des coordonnées : le point symétrique par rapport à (Oz) d'un point de coordonnées (r, θ, φ) pourrait avoir comme coordonnées $(r, -\theta, \varphi)$ ou $(r, \theta, \varphi + \pi)$. Pour lever l'ambiguïté, la deuxième expression est privilégiée et le domaine de définition de θ restreint. ■

III - Exemple du pendule simple



Un **pendule simple** est constitué d'une masse m suspendue à un bâti par un fil tendu de longueur ℓ . Lorsqu'il est décalé de sa position d'équilibre, il y revient en oscillant sous l'effet de la gravité.

M

Application 2 : Pulsation des oscillations

En raisonnant dimensionnellement, identifier une pulsation ω_0 caractéristique des oscillations du pendule.

M

Application 3 : Équation du mouvement

Établir l'équation du mouvement du pendule simple, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par sa coordonnée angulaire θ .

L'équation du mouvement d'un pendule simple s'écrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Cette équation n'admet pas de solution analytique simple.



Une résolution numérique est néanmoins possible ... mais, s'agissant d'une équation différentielle d'ordre 2, le schéma d'Euler explicite tel que nous l'avons vu n'est pas approprié¹. Des exemples de courbes d'évolution de l'angle θ sont représentées figure 2.

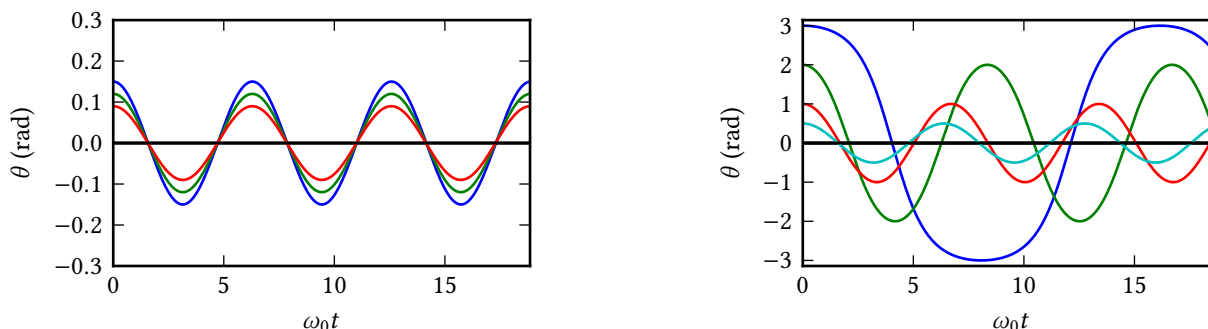


Figure 2 – Résolution numérique de l'équation du pendule simple. Les différentes courbes correspondent à différents angles initiaux θ_0 , la vitesse initiale étant toujours prise nulle. L'échelle est différente sur les deux figures.

La période des petites oscillations ne dépend pas de leur amplitude, au contraire de la période des grandes oscillations. Cette propriété porte le nom d'**isochronisme des petites oscillations**. La transition entre « petites » et « grandes » oscillations a lieu pour $\theta \simeq 25^\circ$.

Application 4 : Petites oscillations du pendule simple

Simplifier l'équation du mouvement pour les petites oscillations, et la résoudre pour des conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Retrouver la propriété d'isochronisme.

► **Pour approfondir** : Relions la période des oscillations à leur amplitude. En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, on obtient

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta \right) = 0.$$

La fonction dans la dérivée est donc une constante, qui peut s'exprimer en raisonnant sur le point de rebroussement du pendule, où θ est maximal égal à l'amplitude θ_m et $\dot{\theta} = 0$,

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta = -\omega_0^2 \cos \theta_m.$$

On en déduit

$$\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}.$$

Intégrons alors par séparation des variables sur le quart de période où θ passe de 0 à θ_m avec $\dot{\theta} \geq 0$:

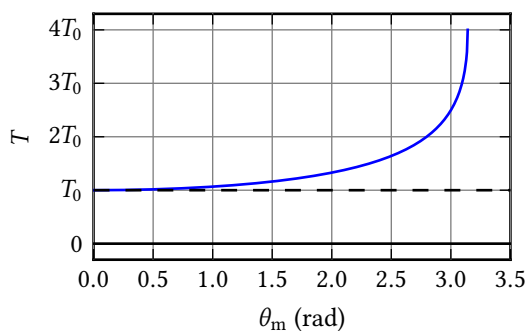
$$\int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}} = \int_0^{T/4} \omega_0 dt$$

En introduisant $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la période propre observée dans la limite des petites oscillations, on en déduit

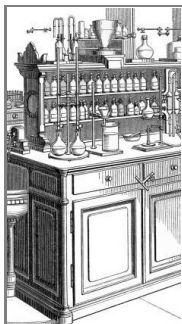
$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}} \simeq \frac{4T_0}{\left(1 + \sqrt{\cos \frac{\theta_m}{2}}\right)^2}$$

L'intégrale ne peut pas s'exprimer de façon exacte à partir de fonctions simples : seule une approximation² ou une évaluation numérique peuvent en être données, représentées sur la courbe ci-dessous.

1. Nous y reviendrons dans la suite de l'année !



On constate que la période T tend vers T_0 lorsque l'amplitude $\theta_m \rightarrow 0$, conformément à ce que l'on a dit à plusieurs reprises, et qu'elle demeure inférieure à $4T_0$ en toute circonstance. ■



Un peu d'histoire : La seconde trouve son origine dans la division du jour en $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ parties égales, définie dans l'Antiquité par les Égyptiens, qui comptaient en base 12, et les Babyloniens, qui comptaient en base 60. Au XVII^e siècle, le pendule simple a joué un rôle majeur dans sa définition pratique. Galilée observa l'isochronisme des petites oscillations, et Huygens construisit en 1656 une horloge à pendule d'une précision inédite. La coïncidence des valeurs numériques, telles que la période d'un pendule simple de longueur 1 m est pratiquement égale à 2 s dans un lieu où $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, fournit une référence pour la seconde facilement réalisable, qui fut exploitée jusqu'au milieu du XX^e siècle, avant d'être remplacée par des réalisations électroniques.