

Particules chargées dans un champ électromagnétique

Champ électrique seul

Exercice 1 : Cavité accélératrice d'électrons



- Mouvement dans un champ électrique ;
- Bilan énergétique.

1 Par définition du potentiel,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{d'où} \quad -E_0 = -\frac{dV}{dx} \quad \text{donc} \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = E_0 \int_0^d dx.$$

Par intégration,

$$V_2 - V_1 = E_0 d \quad \text{d'où} \quad E_0 = \frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{U}{d}.$$

Puisque $E_0 > 0$ alors $V_2 > V_1$, ce qui donne le sens de U .

2 Par identification des deux expressions de E_0 ,

$$E_0 = \frac{U}{d} = \frac{m}{e} \alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{eU}{md}.$$

3 Par conservation de l'énergie mécanique au travers de la cavité,

$$E_m \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - e \times 0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - eU \quad \text{d'où} \quad v_1^2 = v_0^2 + \frac{2eU}{m} = v_0^2 + 2\alpha d$$

ce qui donne finalement

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\alpha d}.$$

4 Par application du PFD à l'électron,

$$m \frac{dv}{dt} = +e \times \frac{m}{e} \alpha \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = \alpha,$$

la constante α est donc l'**accélération de l'électron** dans la cavité. Par intégration, on en déduit

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = \alpha \int_0^{t_1} dt \quad \text{soit} \quad v_1 - v_0 = \alpha t_1$$

ce qui donne

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\alpha d} - v_0}{\alpha} \quad \text{d'où} \quad t_1 = \frac{v_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha d}{v_0^2}} - 1 \right).$$

5 L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\mathcal{P}] = [m] [\tau] [a']^2 \quad \text{soit} \quad [\tau] = \frac{[\mathcal{P}]}{[m] [a']^2} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / \text{s}}{\text{kg} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^2} = \frac{\text{s}^{-1}}{\text{s}^{-2}} = \text{s}$$

On en déduit que τ est homogène à un **temps**.

6 La puissance dissipée étant constante, l'énergie rayonnée vaut

$$W_{\text{ray}} = \mathcal{P} t_1' = m \tau a'^2 t_1'.$$

En reprenant les expressions et en les réorganisant par puissance de τ ,

$$\begin{aligned} W_{\text{ray}} &= m \tau (\alpha + k_a \tau)^2 (t_1 + k_t \tau) \\ &= m \tau (\alpha^2 + 2k_a \alpha \tau + k_a^2 \tau^2) (t_1 + k_t \tau) \\ &= m \tau \alpha^2 t_1 + m (\alpha^2 k_t + 2k_a \alpha t_1) \tau^2 + m (k_a^2 t_1 + 2k_a \alpha k_t) \tau^3 \end{aligned}$$

Puisqu'on se limite au premier ordre en τ , les termes en τ^2 et τ^3 sont négligeables par hypothèse. Ainsi,

$$W_{\text{ray}} = m \tau \alpha^2 t_1.$$

Puisqu'on se limite au premier ordre en τ et qu'il y a déjà τ en facteur dans l'expression de \mathcal{P} , on aurait pu arriver beaucoup plus rapidement au résultat en se limitant aux ordres 0 dans les parenthèses. Cela aurait d'ailleurs été plus rigoureux, car les expressions de t_1' et a' sont elles-mêmes des développements limités au premier ordre en τ . Le développement complet du produit, présenté « pour comprendre » car vous n'êtes pas encore experts en développements limités, est en réalité faux pour le terme d'ordre 3. Une écriture rigoureuse aurait été

$$W_{\text{ray}} = m \tau \alpha^2 t_1 + o(\tau^2).$$

7 Le bilan d'énergie mécanique s'écrit alors

$$\Delta E_m = E_m(x=d) - E_m(x=0) = -W_{\text{ray}} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_1'^2 - eU - \frac{1}{2} m v_0^2 = -m \tau \alpha^2 t_1$$

soit

$$v_1'^2 = v_0^2 + \frac{2eU}{m} - m \tau \alpha^2 t_1 = v_1^2 - 2\tau \alpha^2 t_1.$$

Par passage à la racine,

$$v_1' = \sqrt{v_1^2 - 2\tau \alpha^2 t_1} = v_1 \sqrt{1 - \frac{2\tau \alpha^2 t_1}{v_1^2}}$$

Le terme proportionnel à τ étant par hypothèse très petit devant 1, on peut appliquer le développement limité donné,


$$v_1' = v_1 \left(1 - \frac{2\tau \alpha^2 t_1}{2v_1^2} \right)$$

ce qui s'écrit bien sous la forme voulue

$$v_1' = v_1 - \underbrace{\frac{\alpha^2 t_1}{v_1}}_{=k_v} \tau.$$

Exercice 2 : Détermination d'un champ électrique

oral banque PT | 3 | 2

- 
 ▶ Mouvement dans un champ électrique ;
 ▶ Étude de trajectoire ;
 ▶ Bilan d'énergie.

Un schéma d'ensemble, récapitulant les différentes notations utiles, est représenté figure 1.

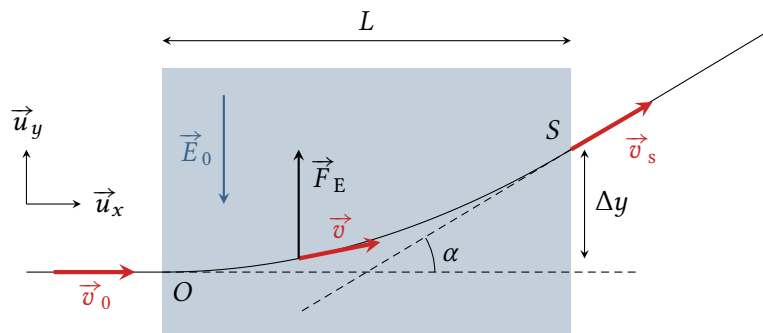


Figure 1 – Schéma d'ensemble des notations utilisées.

1 L'électron subit la force de Lorentz électrique $\vec{F}_E = -e\vec{E}_0$ et son poids qui est négligeable. Compte tenu de la trajectoire, la force \vec{F}_E est dirigée selon $+\vec{u}_y$ et le champ électrique \vec{E}_0 est donc dirigé selon $-\vec{u}_y$.

2 Par application du PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire,

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -e\vec{E}_0$$

soit en projetant

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = +eE_0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} v_x = A \\ v_y = \frac{eE_0}{m}t + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes. Or à l'instant initial où l'électron entre dans la zone de champ $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, d'où on déduit $A = v_0$ et $B = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{eE_0}{m}t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = v_0t + A' \\ y = \frac{eE_0}{2m}t^2 + B' \end{cases}$$

et comme à l'instant initial la particule se trouve au point origine O alors $A' = B' = 0$. Les lois horaires s'écrivent donc

$$\begin{cases} x = v_0t \\ y = \frac{eE_0}{2m}t^2 \end{cases}$$

d'où on déduit l'équation de la trajectoire en remplaçant $t = x/v_0$ dans l'expression de y ,

$$y(x) = \frac{eE_0}{2mv_0^2}x^2.$$

3 Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, on constate qu'en tout point $\vec{v} \cdot \vec{F}_E > 0$: la force a donc un effet moteur, donc

$$\Delta E_c > 0.$$

Appliquons le TEC à l'électron, et commençons par calculer le travail de la force de Lorentz. En notant O le point d'entrée et S le point de sortie de la zone de champ électrique,

$$W_{OS}(\vec{F}_E) = \int_{OS} -e\vec{E}_0 \cdot d\vec{M} = -e\vec{E}_0 \cdot \vec{OS} = +eE_0 \Delta y.$$

L'équation de la trajectoire permet de calculer le décalage Δy :

$$\Delta y = y(L) - y(0) = \frac{eE_0 L^2}{2mv_0^2}.$$

Ainsi, d'après le TEC,

$$\Delta E_c = W_{OS}(\vec{F}_E) = \frac{e^2 E_0^2 L^2}{2mv_0^2}$$

d'où il vient

$$E_0 = \sqrt{\frac{2mv_0^2 \Delta E_c}{L^2 e^2}}.$$

En réintroduisant $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ il vient

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 E_{c0} \Delta E_c}{L^2 e^2}} = 5,6 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4 On constate sur la figure 1 que l'angle de déviation de la trajectoire correspond également à l'inclinaison de la vitesse de sortie par rapport à la vitesse initiale. Ainsi,

$$\tan \alpha = \frac{v_{s,y}}{v_{s,x}} = \frac{eE_0 t_s}{mv_0} = \frac{eE_0 L}{mv_0^2}$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{2eE_0 L}{E_{c0}}.$$

Champ magnétique seul

Exercice 3 : Mouvement cyclotron hélicoïdal



- Mouvement dans un champ magnétique ;
- Coordonnées cylindriques.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - Calculons explicitement le produit vectoriel,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ qR\dot{\theta} \\ q\dot{z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qR\dot{\theta} \times B - q\dot{z} \times 0 \\ -0 \times B + q\dot{z} \times 0 \\ 0 \times 0 - qR\dot{\theta} \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qR\dot{\theta}B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Question d'analyse 2 - Le poids d'une particule microscopique est toujours négligeable devant la force de Lorentz.

Question d'analyse 3 - Puisque $q > 0$, on a ici $\dot{\theta} < 0$. Le signe de $\dot{\theta}$ se manifeste dans le sens d'enroulement de l'hélice, voir figure 4 : en se plaçant face à l'axe (Oz), l'hélice projetée dans le plan (Oxy) apparaît comme un cercle parcouru en sens horaire, alors que le cercle serait parcouru en sens trigonométrique si $\dot{\theta}$ était positif.

Question d'analyse 4 - Voir figure 2.

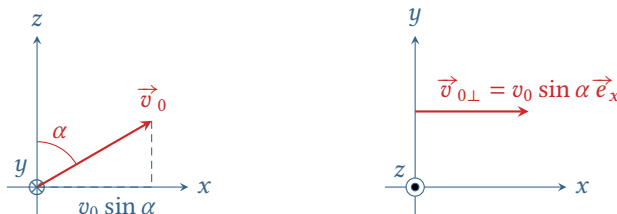


Figure 2 – Projection de la vitesse initiale de la particule.

Question d'analyse 5 - À l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe (Oy), si bien que les vecteurs de la base cylindrique sont placés comme sur la figure 3.

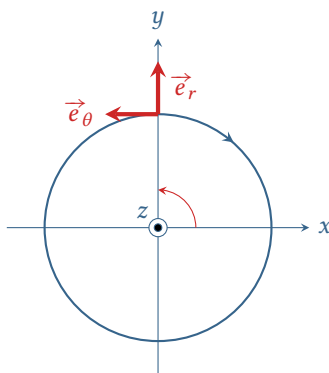


Figure 3 – Base cylindrique à l'instant initial.

Question d'analyse 6 - On a $\omega_c = |\dot{\theta}| = -\dot{\theta}$ puisque $\dot{\theta} < 0$, donc

$$R\dot{\theta}(-\vec{e}_x) = R(-\omega_c)(-\vec{e}_x) = +R\omega_c\vec{e}_x.$$

Question d'analyse 7 - D'après l'expression issue du PFD,

$$\ddot{z} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{z} = A = \text{cte},$$

et avec la condition initiale on trouve

$$\dot{z} \underset{\text{expr}}{=} A = v_0 \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad \dot{z} = v_0 \cos \alpha.$$

Question d'analyse 8 - En reprenant l'expression de R,

$$R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \quad \text{donc} \quad \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Exercice 4 : Mouvement cyclotron avec dissipation

oral banque PT | 🧠 2 | ✂️ 2 | ⚡



- Mouvement dans un champ magnétique ;
- Théorèmes énergétiques.

Le mouvement de la charge est étudié dans un référentiel galiléen. Elle subit la force de Lorentz magnétique

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

1 D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la particule,

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 0$$

car en raison des propriétés du produit vectoriel la force de Lorentz est orthogonale à la vitesse. On en déduit que l'énergie cinétique de la particule est constante, et donc $\|\vec{v}\|$ l'est : le mouvement de la particule est uniforme.

2 Commençons par un schéma de la trajectoire, voir figure 6. Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, il n'y a que deux cercles possibles : celui qui est représenté et son symétrique par rapport au plan (Oyz). Placer la

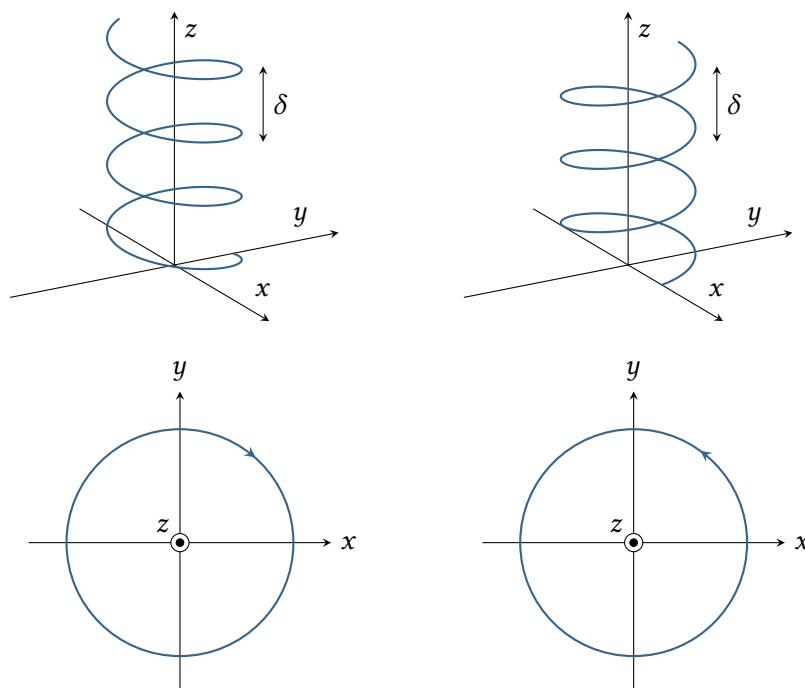


Figure 4 – Allure de la trajectoire en fonction du signe de $\dot{\theta}$. Gauche : $\dot{\theta} < 0$, droite : $\dot{\theta} > 0$.

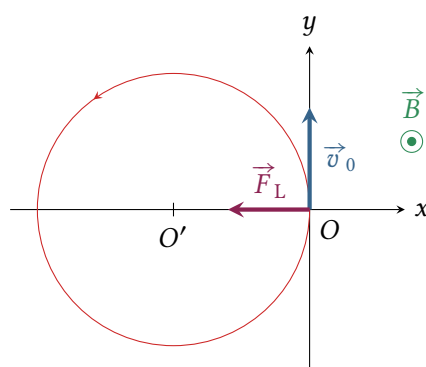


Figure 5 – Trajectoire suivie dans le champ magnétique.

force de Lorentz initiale permet de déterminer dans quel sens la particule est déviée, et donc le cercle qui convient. On en déduit que $\dot{\theta} > 0$.

Utilisons des coordonnées polaires d'origine O' le centre **de la trajectoire**. Comme $r = R_c = \text{cte}$ (rayon cyclotron), alors

$$\overrightarrow{O'M} = R_c \vec{e}_r \quad \text{donc} \quad \vec{v} = R_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v_0 \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R_c \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r.$$

D'après le PFD appliqué à la charge,

$$-m \frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r = q v_0 \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z = q v_0 B \vec{e}_r.$$

On en déduit

$$R_c = -\frac{m v_0}{q B} = \frac{m v_0}{|q| B}.$$

On en déduit les coordonnées du centre de la trajectoire :

$$x_{O'} = -\frac{m v_0}{|q| B} \quad \text{et} \quad y_{O'} = 0.$$

3 La trajectoire est fermée et parcourue à vitesse constante, le mouvement est donc forcément uniforme. La période cyclotron vaut

$$T_c = \frac{2\pi R_c}{v_0} \quad \text{soit} \quad T_c = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

4 Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la charge. On suppose que le rayon R de la trajectoire dépend lentement du temps, mais pas la période du mouvement, qu'il est plus judicieux d'écrire sous forme de la pulsation cyclotron :

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{|q|B}{m} = \text{cte}.$$

L'énergie cinétique vaut donc

$$E_c = \frac{1}{2} m R^2 \omega_c^2$$

et la puissance dissipative

$$\mathcal{P} = -\frac{m R^2 \omega_c^2}{\tau}$$

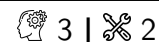
d'où on déduit

$$\frac{dE_c}{dt} = m R \dot{R} \omega_c^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEC}}}{=} -\frac{m R^2 \omega_c^2}{\tau} \quad \text{soit} \quad \dot{R} = -\frac{1}{\tau} R$$

ce qui amène à une classique équation différentielle du premier ordre qui se résout en

$$R(t) = R_c e^{-t/\tau}.$$

Exercice 5 : Étude du mouvement cyclotron en coordonnées cartésiennes



- Mouvement dans un champ magnétique ;
- Coordonnées cartésiennes.

1 Le poids de la particule est négligeable, elle ne subit que la force de Lorentz,

$$\vec{F}_L = q \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement se déduisent du PFD,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 En projection sur l'axe (Oz),

$$\dot{v}_z = 0 \quad \text{donc} \quad v_z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\text{cte}} = 0 \quad \text{d'où} \quad z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\text{cte}} = 0.$$

Le mouvement a donc intégralement lieu dans le plan $z = 0$.

3 Par définition de V ,

$$i \frac{qB}{m} V = \frac{qB}{m} (iv_x - v_y)$$

et d'après le PFD

$$\frac{dV}{dt} = \dot{v}_x + i\dot{v}_y = \frac{qB}{m} (v_y - iv_x).$$

On a donc bien

$$\frac{dV}{dt} + i \frac{qB}{m} V = 0.$$

4 Les solutions de cette équation sont de la forme

$$\underline{V}(t) = \underline{A} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right)$$

avec à l'instant initial

$$\underline{V}(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{\underline{A}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{v_0 + i \times 0}$$

d'où

$$\underline{V}(t) = v_0 \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right).$$

En intégrant une deuxième fois,

$$\underline{X}(t) = -\frac{mv_0}{iqB} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) + \underline{A}' = i \frac{mv_0}{qB} \exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) + \underline{A}'.$$

À l'instant initial,

$$\underline{X}(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{i \frac{mv_0}{qB}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\underline{A}'} = 0$$

d'où

$$\underline{X}(t) = i \frac{mv_0}{qB} \left[\exp\left(-i \frac{qB}{m} t\right) - 1 \right].$$

5 Par définition de \underline{X} ,

$$x(t) = \text{Re } \underline{X}(t) = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) \quad \text{et} \quad y(t) = \text{Im } \underline{X}(t) = \frac{mv_0}{qB} \left[\cos\left(\frac{qB}{m} t\right) - 1 \right].$$

Par l'identité trigonométrique fondamentale,

$$\left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \sin^2\left(\frac{qB}{m} t\right) + \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \cos^2\left(\frac{qB}{m} t\right) = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$$

ce qui permet d'identifier

$$x(t)^2 + \left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2.$$

On reconnaît alors l'équation cartésienne d'un cercle de rayon

$$R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$

et dont le centre Ω a pour coordonnées

$$x_\Omega = 0 \quad \text{et} \quad y_\Omega = -\frac{mv_0}{qB}.$$

Rappelons que l'équation cartésienne d'un cercle de centre Ω et de rayon R s'écrit

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

Le signe de la charge q n'étant pas précisé jusqu'à présent, il ne faut pas oublier la valeur absolue dans l'expression de rayon.

6 Voir figure 6. Si $q > 0$ alors le centre du cercle trajectoire se trouve à une ordonnée $y_\Omega < 0$, et inversement si $q < 0$.

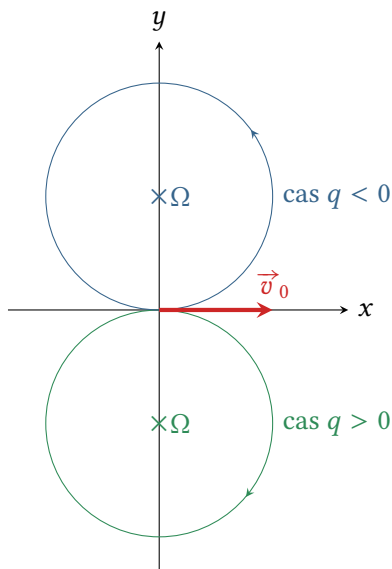


Figure 6 – Trajectoire cyclotron.

On constate que les trajectoires tracées sont bien sûr cohérentes avec la force de Lorentz à l’instant initial,

$$\vec{F}_L(t=0) = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -qv_0 B \vec{e}_y,$$

qui indique si la particule doit être déviée vers le haut ou le bas sur le schéma.

Champ électrique et magnétique

Exercice 6 : Sélecteur de vitesse



▸ Force de Lorentz.

La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz. Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé si son vecteur accélération est nul, c’est-à-dire d’après la loi de la quantité de mouvement si la force de Lorentz est nulle,

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

ce qui donne

$$E_0 \vec{u}_y + v_0 B_0 (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{E_0 - v_0 B_0 = 0}$$

▮ Rappel : $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$.

On peut utiliser la contraposée de la question précédente : si le vecteur vitesse de la particule n’est pas égal à $v_0 \vec{u}_x$ alors elle est déviée. En plaçant par exemple un masque en sortie de la zone de champ, on peut ne garder que les particules passant par un trou accessible seulement si elles ont la vitesse \vec{v}_0 et bloquer les autres.

Exercice 7 : Spectrométrie de masse



- Mouvement dans un champ électrique ;
- Mouvement dans un champ magnétique ;
- Étude de trajectoire ;
- Bilan énergétique.

1 Les protéines sont chargées positivement. Pour les accélérer, le champ électrique doit donc être dirigé de P_1 vers P_2 et comme $\vec{E} = -\text{grad} V$, il faut donc que **la plaque P_2 soit portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1 .**

L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{pe} = zeV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 où la vitesse est nulle et P_2

$$0 + zeV(P_1) = \frac{1}{2} m v^2 + zeV(P_2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = ze [V(P_1) - V(P_2)]$$

$$v = \sqrt{\frac{2zeU}{m}}$$

2 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_B = ze\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte}.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

3 La trajectoire étant circulaire plane, on la décrit dans la base de Frénet.

$$m\vec{a} = \vec{F}_L \quad \text{soit} \quad m \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right) = qvB \vec{e}_n$$

On déduit de la projection sur \vec{e}_n

$$R = \frac{mv}{zeB}.$$

En remplaçant v par son expression,

$$R = \frac{m}{zeB} \sqrt{\frac{2zeU}{m}} \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{zeB^2}}.$$

4 L'abscisse y de détection est égale à $2R$. On en déduit la masse d'une protéine de charge ze ,

$$m = \frac{zeR^2 B^2}{2U} \quad \text{d'où} \quad M = \frac{zeR^2 B^2}{2U} N_A$$

Les deux mesures pour $z = 1$ et 2 conduisent à une masse molaire de $1,3 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette valeur est élevée, mais les protéines sont des grosses molécules : une protéine moyenne compte typiquement 200 acides aminés, formés eux-mêmes de quinze à vingt atomes différents.

Exercice 8 : Cyclotron



- Mouvement dans un champ électrique ;
- Mouvement dans un champ magnétique ;
- Étude de trajectoire ;
- Bilan énergétique.

- **Système** : un proton ;
- **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen ;
- **Bilan des forces** : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

1 Dans un dee, seul un champ magnétique est présent. La force de Lorentz exprimée dans la base de Frénet s'écrit

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} = ev\vec{e}_t \wedge B\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{F}_L = qvB\vec{e}_n.$$

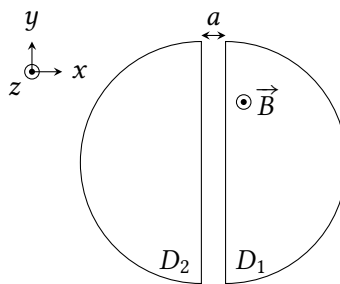


Figure 7 – Cyclotron.

Il faut savoir que la force de Lorentz est forcément dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire lorsqu'elle est la seule mise en jeu, et donc portée par \vec{e}_n . Le retrouver à chaque fois est fastidieux, et souvent source d'erreur.

D'après le PFD,

$$m \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right) = qvB \vec{e}_n$$

La projection sur \vec{e}_t montre que le mouvement est uniforme à la vitesse v , celle sur \vec{e}_n conduit à l'expression du rayon R :

$$R = \frac{mv}{eB}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur πR , parcourue en un temps

$$\Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22 \text{ ns}.$$

On remarque que Δt ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee.

2 Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_1 à D_2 . En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt , soit pour la période

$$T = 2\Delta t = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{et} \quad f = \frac{eB}{2\pi m} = 23 \text{ MHz}.$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension, ce qui permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

3 Appliquons le TEM au proton entre la sortie d'un dee et l'entrée de l'autre. On suppose que lors de ce passage la tension est maximum et constante : $a \ll \pi R$ donc le temps de vol dans l'espace entre les dees est négligeable devant la durée passée dans un dee. Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + eV_2 = \frac{1}{2}mv_n^2 + eV_1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 = eU_m.$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \simeq \frac{1}{2}mv_n^2 = neU_m \quad \text{soit} \quad v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$$

soit

$$R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{B^2e}}$$

4 L'énergie cinétique du proton en sortie du cyclotron s'écrit

$$E_{c,s} = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{R_s^2 e^2 B^2}{2m} \quad \text{d'où} \quad R_s = \frac{\sqrt{2mE_{c,s}}eB}{=} 43,5 \text{ cm}.$$

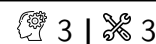
On en déduit également le nombre de passages par la zone accélératrice,

$$E_{c,s} = NeU_m \quad \text{soit} \quad N = \frac{E_{c,s}}{eU_m} = 400,$$

et comme un tour compte deux passages dans la zone séparant les dees, on en déduit que **le proton a parcouru 200 tours** dans le cyclotron avant d'en sortir.

En pratique, l'approximation de tension constante et maximale lors de la traversée de la zone séparant les dees est très optimiste, et le nombre de tours nécessaires pour atteindre l'énergie voulue est en réalité supérieur à notre estimation, mais reste de l'ordre de quelques centaines.

Exercice 9 : Mouvement dans des champs E et B croisés



- ▷ Mouvement dans un champ électrique ;
- ▷ Mouvement dans un champ magnétique ;
- ▷ Étude de trajectoire en coordonnées cartésiennes.

1 ▷ Système : particule chargée.

- ▷ Référentiel : pas clairement précisé par l'énoncé, mais on le suppose au moins galiléen.
- ▷ Repérage : cartésien.
- ▷ Bilan des forces : le poids étant négligeable pour une particule microscopique, elle ne subit que la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q \begin{bmatrix} Bv_y \\ E - Bv_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

▷ PFD :

$$m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} Bv_y \\ E - Bv_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

La projection du PFD sur \vec{e}_z et les conditions initiales permettent de montrer que

$$\dot{v}_z = \text{cte} \underset{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad z = \text{cte} \underset{\text{CI}}{=} 0.$$

Le mouvement de la particule est donc **plan**.

2 La projection du PFD sur \vec{e}_y donne

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE - qBv_x \quad \text{donc} \quad m \frac{d^2v_y}{dt^2} = -qB \frac{dv_x}{dt}$$

Or d'après la projection du PFD sur \vec{e}_x

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \quad \text{d'où} \quad m \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{(qB)^2}{m} v_y$$

ce qui peut se réécrire

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

Par conséquent,

$$v_y(t) = \lambda \sin(\omega t) + \lambda' \cos(\omega t)$$

et comme la particule est initialement sans vitesse alors $\lambda' = 0$ et

$$v_y(t) = \lambda \sin(\omega t).$$

3 La projection du PFD sur \vec{e}_y conduit à

$$v_x = \frac{E}{B} - \frac{1}{\omega} \frac{dv_y}{dt} = \frac{E}{B} - \frac{1}{\omega} \times \omega \lambda \cos(\omega t).$$

La particule étant sans vitesse à $t = 0$, on en déduit

$$\lambda = \frac{E}{B}$$

et ainsi

$$v_x(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos(\omega t)).$$

4 Par définition et comme $\omega = 2\pi/T$,

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^T = \frac{1}{\omega T} (\sin 2\pi - \sin 0) = 0.$$

On montre de même que $\langle \sin(\omega t) \rangle = 0$.

5 D'après ce qui précède,

$$\vec{v}(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos(\omega t)) \vec{e}_x + \frac{E}{B} \sin(\omega t) \vec{e}_y.$$

Puisque $\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = 0$, on en déduit

$$\vec{v}_d = \langle \vec{v} \rangle = \frac{E}{B} \vec{e}_x.$$

Le champ électrique étant dirigé selon \vec{e}_y , on aurait pu s'attendre à ce que la trajectoire de la particule soit globalement dirigée dans la même direction, et pourtant il n'en est rien, elle se déplace en moyenne dans une direction orthogonale à celle de \vec{E} .

6 Intégrons les composantes de la vitesse par séparation des variables. La particule se trouvant initialement à l'origine du repère,

$$\begin{aligned} \int_{x(0)=0}^{x(t)} dx &= \int_0^t v_x(t) dt \\ \int_0^{x(t)} dx &= \frac{E}{B} \int_0^t (1 - \cos(\omega t)) dt \\ x(t) &= \frac{E}{B} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin(\omega t))$$

De même,

$$\int_{y(0)=0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y(t) dt$$

$$\int_0^{y(t)} dy = \frac{E}{B} \int_0^t \sin(\omega t) dt$$

$$y(t) = \frac{E}{B} \times \frac{1}{\omega} \left[-\cos(\omega t) \right]_0^t$$

$$\boxed{y(t) = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos(\omega t))}$$

7 À partir de l'équation ci-dessus portant sur y , on trouve

$$\boxed{a = \frac{2E}{\omega B}}$$

De plus, la période du mouvement dans la direction (Oy) est $T = 2\pi/\omega$. Pendant cette durée, la particule avance de $b = x(T) - x(0)$, soit

$$b = \frac{E}{\omega B} \times \omega \times \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{b = \frac{2\pi E}{\omega B}}$$

Les instants auxquels y est extrême sont ceux auquel la vitesse v_y s'annule, soit

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Les valeurs de n impaires correspondent aux maximums, où la courbe est plate, et les valeurs paires aux minimums, où la trajectoire présente un point de rebroussement. Cette nette différence d'allure s'explique par exemple en étudiant la vitesse $v_x(t_n)$, qui est non-nulle pour les valeurs de n impaires (maximum ordinaire) et nulle pour les valeurs de n paire (point de rebroussement). Qualitativement, au niveau du maximum ordinaire, la particule continue à avancer dans la direction \vec{e}_x , si bien que le changement de signe de v_y apparaît dans la continuité de la courbe : dans le langage des courbes paramétrées, il s'agit d'un point ordinaire. En revanche, la particule s'arrête complètement au niveau du point de rebroussement, puis repart « vers le haut » puisque v_y change de signe.