Introduction à la thermodynamique

Modèle du gaz parfait

Exercice 1 : Pression des pneus 1 | 1

▹ *Équation d'état des gaz parfaits.*

1 Comme la quantité de matière n d'air contenu dans le pneu et son volume V sont des constantes, alors d'après l'équation d'état des gaz parfaits,

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{nR}{V}$$

d'où on déduit

$$\boxed{P_2 = \frac{T_2}{T_1} P_1 = 2{,}5\,\text{bar}\,.}$$

2 La variation relative de pression est supérieure à 10 %, ce qui est loin d'être négligeable. Le meilleur conseil à donner est de refaire la pression des pneus de la voiture. Notez d'ailleurs qu'il est préconisé de la vérifier chaque mois ... et indispensable de le faire au moins deux fois par an, avant les grands trajets !

Exercice 2 : Fuite d'hélium 2 | 1

▹ *Équation d'état des gaz parfaits ;*
▹ *Vitesse quadratique moyenne.*

1 D'après la loi des gaz parfaits,

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m = \frac{MpV}{RT} = 3{,}4\,\text{g}\,.}$$

La densité particulaire est reliée au nombre total d'atomes N contenus dans la bouteille et à son volume par $n^\star = N/V$. Ainsi, l'équation d'état donne

$$pV = \frac{N}{\mathcal{N}_A} RT \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n^\star = \frac{p\mathcal{N}_A}{RT} = 5{,}1 \cdot 10^{25}\,\text{atomes/m}^3\,.}$$

2 Par définition de la température cinétique,

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

où $m = M/\mathcal{N}_A$ est la masse d'un atome. Comme $R = \mathcal{N}_A k_B$,

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1{,}4 \cdot 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

3 La masse restante m' vaut

$$m' = \frac{Mp'V}{RT'} = 2{,}0\,\mathrm{g}$$

si bien que

$$\boxed{\Delta m = m - m' = 1{,}0\,\mathrm{g}\,.}$$

4 Toujours d'après l'équation d'état, on a dans ce nouvel état

$$pV = \frac{m'}{M}RT'' \qquad \text{donc} \qquad T'' = \frac{MpV}{m'R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T'' = \frac{p}{p'}T' = 435\,\mathrm{K}\,.}$$

Exercice 3 : Existence d'une atmosphère

2 | 1

▹ *Vitesse quadratique moyenne.*

1 On trouve $v_{\text{lib,T}} = 1{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $v_{\text{lib,L}} = 2{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 À la surface de la Terre ($T = 20\,°\mathrm{C}$), la vitesse quadratique moyenne vaut (cf. cours)

$$u_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\mathrm{N_2}}}} = 5{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Ainsi, elle est très inférieure à la vitesse de libération, ce qui permet de comprendre l'existence d'une atmosphère stable.

> *Attention, la vitesse quadratique moyenne n'est … qu'une moyenne ! Un certain nombre de molécules du gaz, de l'ordre de la moitié, ont une vitesse supérieure à u. La condition de non-dispersion de l'atmosphère par agitation thermique doit donc s'écrire $u \ll v_{lib}$, mais pas $u \leq v_{lib}$.*

3 Pour qu'une atmosphère composée de diazote puisse exister à la surface de la Lune, il faudrait avoir

$$u_{\mathrm{L}} \ll v_{\text{lib,L}} \qquad \text{soit} \qquad T \ll \frac{M_{\mathrm{N_2}}\, v_{\text{lib,L}}^2}{3R} = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{K}\,.$$

On peut penser que cette condition est globalement remplie, et donc que notre explication n'est donc **pas suffisante**, puisque la température de la Lune devrait permettre l'existence d'une atmosphère stable. En pratique, le champ magnétique joue aussi un rôle essentiel en formant un bouclier qui dévie les vents solaires (flux de particules chargées, principalement des protons et des électrons, éjecté en continu du Soleil dans toutes les directions), et protège l'atmosphère. La Lune ne produisant pas de champ magnétique, son hypothétique atmosphère serait arrachée par le vent solaire.

Exercice 4 : Gaz de Clausius

2 | 1

▹ *Équation d'état.*

1 Le volume exclu représente un volume dans lequel ne peuvent pas pénétrer les molécules du gaz, lié au fait que ces molécules ne sont pas ponctuelles mais de taille finie. Autrement dit, b représente le **volume propre de 1 mol de molécules**.

2 L'équation d'état donnée est molaire, mais il faut l'écrire sous forme extensive pour tracer les isothermes demandées. En multipliant par la quantité de matière,

$$P(V - nb) = nRT\,.$$

En développant,

$$PV = nPb + nRT\,.$$

Les isothermes sont donc des **droites croissantes parallèles**, de pente nb et d'ordonnée à l'origine nRT. Le volume exclu b s'obtient en linéarisant les isothermes et **en estimant leur pente**.

3 Dans la limite des faibles pressions, $nPb \ll nRT$: le gaz de Clausius a donc un comportement de gaz parfait, ce qui n'est pas surprenant.

Équilibre thermodynamique

Exercice 5 : Gonflage d'un ballon de basket

2 | 2 |

▹ *Équation d'état des gaz parfaits.*

1 À chaque aller-retour du piston, la quantité d'air contenue dans le ballon augmente. Le volume et la température restant constants, la pression augmente nécessairement. La quantité de matière initiale contenue dans le ballon vaut

$$n_0 = \frac{P_0 V_0}{R T_0}\,.$$

À chaque aller-retour, on y ajoute la quantité d'air passée par le piston, soit

$$n_1 = \frac{P_0 V_1}{R T_0}\,.$$

Ainsi, après k allers-retours,

$$n_k = n_0 + k n_1 = \frac{P_0 (V_0 + k V_1)}{R T_0}\,.$$

On en déduit la pression,

$$P_k = \frac{n_k R T_0}{V_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P_k = \frac{V_0 + k V_1}{V_0} P_0\,.}$$

2 Le résultat précédent se réécrit

$$\frac{P_k}{P_0} = 1 + k \frac{V_1}{V_0}$$

d'où on déduit que la pression cible $P^\star$ est atteinte au bout $k^\star$ allers-retours avec

$$k^\star = \frac{V_0}{V_1}\left(\frac{P^\star}{P_0} - 1\right)\,.$$

Numériquement,

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_0}{2}\right)^3 = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \qquad \text{et} \qquad V_1 = \frac{\pi {d_1}^2}{4}\ell_1 = 7{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

d'où on trouve

$$k^\star = 55{,}3\,.$$

Il faut donc faire **56 allers-retours** pour atteindre la pression préconisée dans le ballon.

Exercice 6 : Échanges entre deux réservoirs 2 | 1 |

- *Équation d'état des gaz parfaits ;*
- *Équilibre thermodynamique.*

1 Le réservoir ❶ est chauffé alors que le réservoir ❷ est refroidi, il y a donc un transfert d'énergie entre les deux. Le système est dans un état stationnaire, mais pas dans un état d'équilibre thermodynamique.

2 Les deux réservoirs communiquent, et l'équilibre mécanique est atteint (pas de flux de gaz au travers du tube reliant les deux réservoirs). La pression est donc la même dans les deux réservoirs, d'où

$$\begin{cases} PV = n_1 R T_1 \\ PV = n_2 R T_2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad n_1 T_1 = n_2 T_2 \,.$$

La quantité totale de gaz se conservant,

$$n_1 + n_2 = n \qquad \text{soit} \qquad \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) n_1 = n \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n_1 = \frac{T_2}{T_1 + T_2} n \,,}$$

et de même

$$\boxed{n_2 = \frac{T_1}{T_1 + T_2} n \,.}$$

> *Le résultat s'obtient de manière naturelle en échangeant les 1 et les 2 … et il est toujours utile de vérifier que l'on retrouve bien $n_1 + n_2 = n$!*

3 D'après l'équation d'état appliquée à l'un ou l'autre des réservoirs,

$$\boxed{P = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \frac{nR}{V} \,.}$$

Exercice 7 : Tube circulaire à deux compartiments oral banque PT | 3 | 3

- *Force de pression ;*
- *Équilibre mécanique ;*
- *Oscillateur harmonique.*

Dans tout l'exercice, on raisonne sur le piston, qui est soumis à quatre forces :
- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$;
- la force pressante exercée par le compartiment de gauche : $\vec{F}_\mathrm{g} = P_\mathrm{g} S \vec{e}_\theta$;
- la force pressante exercée par le compartiment de droite : $\vec{F}_\mathrm{d} = -P_\mathrm{d} S \vec{e}_\theta$;
- la force de réaction du tube, dont la composante orthoradiale est forcément nulle car le piston se déplace sans frottement : $\vec{N} = N\vec{e}_r$.

1 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au piston, supposé en équilibre. En projection sur $\vec{e}_\theta$, on obtient

$$mg\sin\theta + P_\mathrm{g} S - P_\mathrm{d} S = 0$$

Pour relier les pressions à l'angle θ, exprimons le volume des deux compartiments :

$$V_\mathrm{g} = \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) aS \qquad \text{et} \qquad V_\mathrm{d} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) aS$$

> *Rappelons l'interprétation géométrique d'un angle en radian : un arc de cercle de rayon R compris entre les angles θ_1 et $\theta_2 > \theta_1$ a une longueur $\ell = R(\theta_2 - \theta_1)$. Sachant qu'un quart de cercle a pour longueur angulaire $\pi/2$ (donc longueur $R\pi/2 = 2\pi R/4$), on en déduit que les deux compartiments ont pour longueur*

> *angulaire respective $\pi/2+\theta$ et $\pi/2-\theta$.*

Avec l'équation d'état, la condition d'équilibre s'écrit donc

$$mg\sin\theta + \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)aS}S - \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)aS}S = 0$$

ce que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{nRT}{mga}\left(\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}-\theta} - \frac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\theta}\right)\\ &= \frac{nRT}{mga}\,\frac{\dfrac{\pi}{2}+\theta-\dfrac{\pi}{2}+\theta}{\dfrac{\pi^2}{4}-\theta^2}\\ &= \frac{8nRT}{\pi^2 mga}\,\frac{\theta}{1-\dfrac{4\theta^2}{\pi^2}}\end{aligned}$$

ce qui permet bien d'identifier

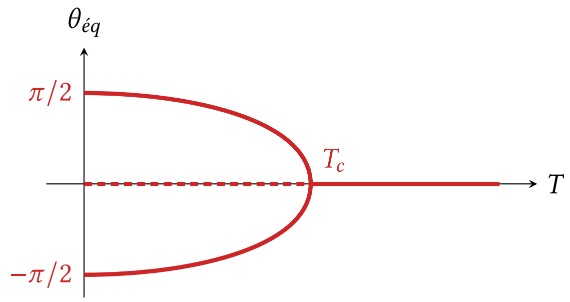
$$\boxed{\sin\theta = \frac{T}{T_c}\,\frac{\theta}{1-4\theta^2/\pi^2} \qquad \text{avec} \qquad T_c = \frac{\pi^2 mga}{8nR}\,.}$$

$\boxed{2}$ On constate que $\theta=0$ est toujours position d'équilibre, indépendamment de la température. Cherchons s'il en existe d'autres, en se limitant aux valeurs $\theta>0$: par symétrie, si θ est position d'équilibre, alors $-\theta$ l'est aussi. D'après l'inégalité de convexité du sinus, $\sin\theta \leq \theta$: s'il existe des positions d'équilibre $\theta \neq 0$, cela impose d'avoir

$$\frac{T/T_c}{1-4\theta^2/\pi^2} < 1\,.$$

Comme $1-4\theta^2/\pi^2 < 1$, cette condition ne peut être vérifiée que si $T<T_c$. Ainsi,

- si $T<T_c$, il existe trois positions d'équilibre : $\theta=0$ (qualitativement instable) et $\theta=\pm\theta^\star$ (qualitativement stable) ;
- si $T>T_c$, seule la position d'équilibre $\theta=0$ demeure, et elle est stable.

> ***Pour aller plus loin :*** *On peut représenter la situation sur le diagramme ci-dessous, appelé diagramme de bifurcation. Dans le cas présent, on parle de bifurcation fourche supercritique.*
>
> 
>
>
> *La limite basse température peut être étudiée par un développement limité : comme $T \ll T_c$, alors $\sin\theta \ll 1$, ce qui autorise un développement limité. L'équation auto-cohérente devient*
>
> $$\left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\sin\theta = \frac{T}{T_c}\theta \qquad \textit{soit} \qquad \left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\cancel{\theta} = \frac{T}{T_c}\cancel{\theta} \longrightarrow 0$$
>
> *ce qui impose*
>
> $$\left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right) = 0 \qquad \textit{d'où} \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

3 Le piston se trouve initialement sur sa position d'équilibre stable $\theta = 0$, jusqu'à ce que la température atteigne T_c. À ce moment là, la position d'équilibre $\theta = 0$ devient instable. Sous l'effet d'une fluctuation interne au système, le piston finit par être déséquilibré et se retrouve sur l'une des deux positions d'équilibre $\pm\theta$, sur laquelle il reste jusqu'à ce que T atteigne T_2 ... mais attention, comme cette position dépend de la température, le piston continue à se déplacer en la suivant.

4 Le mouvement du piston étant circulaire, on a

$$\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{e}_r \qquad \leadsto \qquad \overrightarrow{v} = a\dot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \qquad \leadsto \qquad \overrightarrow{a} = -a\dot\theta^2\,\overrightarrow{e}_r + a\ddot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\,.$$

Comme il n'y a pas de frottement, les forces ont la même expression qu'à la question 1. Le théorème de la résultante cinétique projeté sur $\overrightarrow{e}_\theta$ donne alors

$$ma\ddot\theta = mg\sin\theta + \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)aS}S - \frac{nRT}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)aS}S$$

Les mêmes calculs qu'à la question 1 donnent alors

$$ma\ddot\theta = mg\sin\theta + \frac{2nRT}{\pi a}\left(\frac{1}{1+2\theta/\pi} - \frac{1}{1-2\theta/\pi}\right)\,.$$

On se place au voisinage immédiat de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$, ce qui permet de supposer $\theta \ll 1$ et de faire des développements limités. On a alors

$$ma\ddot\theta = mg\theta - \frac{8nRT}{\pi^2 a}\theta$$

qui se réécrit aussi

$$\ddot\theta + \left(\frac{8nRT}{\pi^2a^2m} - \frac{g}{a}\right)\theta = 0\,.$$

On reconnaît alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$${\omega_0}^2 = \frac{8nRT}{\pi^2a^2m} - \frac{g}{a} = \frac{T}{T_c}\frac{g}{a} - \frac{g}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{T}{T_c}-1\right)\frac{g}{a}}\,.}$$