Signal et spectre

Exercices

Exercice 1 : Signal harmonique de moyenne non nulle [♦◊◊]

Considérons le signal harmonique décalé $s(t) = S_0 + S_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$.

1 - Déterminer sa période.

2 - Déterminer son amplitude crête-à-crête.

3 - Montrer que sa valeur moyenne est égale à S_0.

4 - Représenter son chronogramme, et le légender en faisant apparaître les grandeurs déterminées dans les questions précédentes.

Exercice 2 : Somme de signaux synchrones [♦◊◊]

Considérons deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ périodiques de même période T et leur signal somme $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

1 - Le signal somme $s(t)$ est-il un signal périodique ? Le cas échéant, quelle est sa période ?

2 - Exprimer la valeur moyenne $\langle s \rangle$ en fonction de $\langle s_1 \rangle$ et $\langle s_2 \rangle$.

3 - Proposer une expression mathématique pour $s_1(t)$ et $s_2(t)$ dans le cas où il s'agit de deux signaux harmoniques d'amplitudes respectives S_1 et S_2 et déphasés de $\pi/3$.

Exercice 3 : Signal triangle [♦♦◊]

On considère une tension $u(t)$ triangulaire, comprise entre 0 et $U_0 = 2\,\mathrm{V}$, et de période $T = 0{,}50\,\mathrm{s}$. Pour $t \in [0, T]$ elle est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{2U_0}{T} t & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ 2U_0 - \dfrac{2U_0}{T} t & \text{si } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

et elle se reproduit périodiquement.

1 - Tracer le chronogramme de u d'abord entre 0 et T puis en généralisant. Vous n'oublierez pas de graduer les axes de votre figure.

2 - Justifier qualitativement que $\langle u \rangle = U_0/2 = 1\,\mathrm{V}$.

3 - Vérifier ce résultat par un calcul explicite d'intégrale.

Exercice 4 : Spectre d'une somme et d'un produit de signaux [♦♦◊]

Considérons les deux tensions

$$u_1(t) = U_1 \cos(2\pi\, f_1\, t) \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = U_2 \cos(2\pi\, f_2\, t + \varphi)$$

avec $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $U_2 = 5\,\mathrm{V}$, $f_1 = 40\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 60\,\mathrm{Hz}$ et $\varphi = 3\pi/4$.

1 - Un montage additionneur permet d'obtenir la tension somme, $u_\mathrm{s}(t) = u_1(t) + u_2(t)$.
1.a **-** Tracer le spectre d'amplitude et de phase de u_s.
1.b **-** S'agit-il d'une tension périodique ? Déterminer sa fréquence.

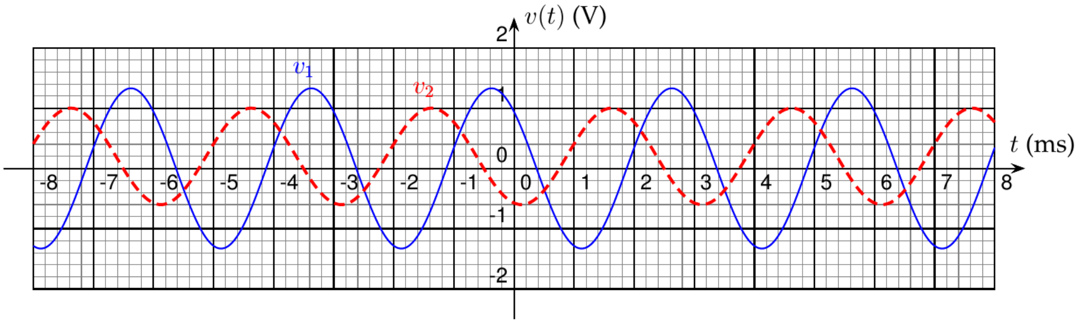
2 - Un autre montage électronique, dit multiplieur, permet d'obtenir cette fois une tension $u_\mathrm{p}(t) = k\, u_1(t)\, u_2(t)$ où $k = 0{,}2\,\mathrm{V}^{-1}$ est une constante caractéristique du montage.
2.a **-** Déterminer les fréquences contenues dans le spectre de u_p en utilisant la formule de trigonométrie

$$\cos a\, \cos b = \frac{1}{2} \left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] .$$

2.b **-** Tracer le spectre d'amplitude et le spectre de phase de u_p.
2.c **-** Que se passerait-il si les deux tensions étaient synchrones ?

Exercice 5 : Mesure d'un déphasage à l'oscilloscope [♦♦♢]

La figure représente l'écran d'un oscilloscope dont le calibre est réglé à 1 ms/div et 1 V/div.



1 - Donner par lecture graphique l'amplitude, la valeur moyenne, la période et la fréquence de chacune des tensions. Les deux tensions sont-elles synchrones ?

2 - La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à v_1 ? Quel est le décalage temporel associé ? En déduire le déphasage.

3 - Donner la phase à l'origine des deux tensions.

Signal et spectre

Exercices

Exercice 1 : Signal harmonique de moyenne non nulle

1 Cherchons T telle que
$$S_0 + S_\mathrm{m}\cos(\omega t + \omega T + \varphi) = S_0 + S_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$$
soit
$$\cos(\omega t + \omega T + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)\,.$$
Par périodicité du cosinus, on en déduit $\omega T = 2\pi$ donc
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}\,.}$$

2 Comme pour tout t, $-1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq 1$ alors
$$S_0 - S_\mathrm{m} \leq s(t) \leq S_0 + S_\mathrm{m}$$
d'où on déduit
$$S_\mathrm{cc} = S_0 + S_\mathrm{m} - S_0 + S_\mathrm{m} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{S_\mathrm{cc} = 2S_\mathrm{m}\,.}$$

3 On reproduit le raisonnement du cours à propos du signal harmonique.
$$\begin{aligned}\langle s\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T (S_0 + S_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi))\,\mathrm{d}t \\ &\underbrace{=}_{\text{linéarité}} \frac{S_0}{T}\times T + \frac{S_\mathrm{m}}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T \\ &= S_0 + \frac{S_\mathrm{m}}{\omega T}\left[\sin(\omega T+\varphi) - \sin(\varphi)\right] \\ &= S_0 + \frac{S_\mathrm{m}}{2\pi}\left[\sin(2\pi+\varphi) - \sin(\varphi)\right]\end{aligned}$$
$$\boxed{\langle s\rangle = S_0}$$

4 Voir figure 1.

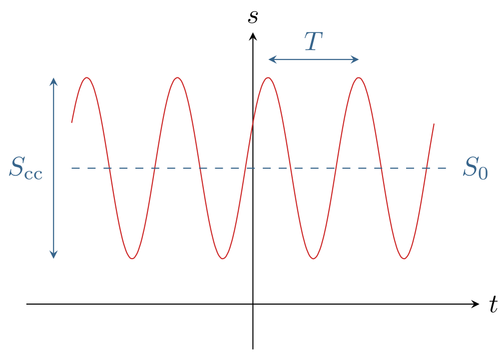


Figure 1 – Chronogramme du signal harmonique décalé.

Exercice 2 : Somme de signaux synchrones

1 Comme s_1 et s_2 sont périodiques de période T, pour tout instant t, $s_1(t+T) = s_1(t)$ et $s_2(t+T) = s_2(t)$. Par conséquent,

$$s(t+T) = s_1(t+T) + s_2(t+T) = s_1(t) + s_2(t) = s(t)$$

Ainsi, **le signal $\boldsymbol{s}$ est périodique de période $\boldsymbol{T}$.**

2 Partons de la définition de la valeur moyenne,

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [s_1(t) + s_2(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\,\mathrm{d}t$$

en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale. On reconnaît alors les valeurs moyennes de s_1 et s_2, d'où

$$\boxed{\langle s \rangle = \langle s_1 \rangle + \langle s_2 \rangle}$$

3 Le choix le plus simple est

$$\boxed{s_1(t) = S_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad \text{et} \qquad s_2(t) = S_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Cependant, rien n'empêche d'ajouter une phase constante à chacun des deux signaux et de prendre par exemple

$$s_1(t) = S_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad s_2(t) = S_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = S_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 3 : Signal triangle

1 La tension est affine par morceau. Pour le tracé, il suffit donc de déterminer deux points par segment de droite à partir de l'expression mathématique : en $t = 0$, $u = 0$; en $t = T/2 = 0{,}25\,\mathrm{s}$, $u = U_0 = 2\,\mathrm{V}$; et en $t = T = 0{,}50\,\mathrm{s}$, $u = 0$. On en déduit le chronogramme de la figure 2, prolongé par périodicité.

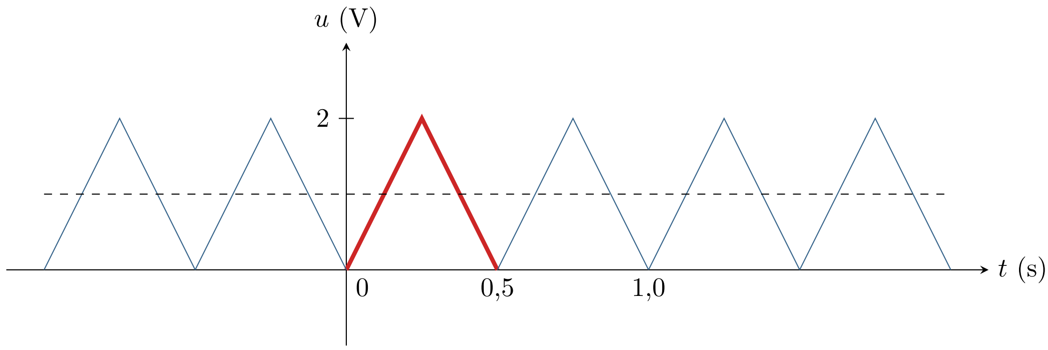


Figure 2 – Chronogramme du signal triangle.

2 On constate sur la figure 2 que le chronogramme est symétrique par rapport à $1\,\mathrm{V}$. On s'attend donc à ce que $\langle u \rangle = 1\,\mathrm{V}$.

3 Par définition de la valeur moyenne,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

D'après la relation de Chasles, on peut séparer l'intégrale en deux et introduire les deux expressions de $u(t)$,

$$\begin{aligned}
\langle u\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\frac{2U_0}{T}t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\left(2U_0-\frac{2U_0}{T}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\times\frac{2U_0}{T}\int_0^{T/2}t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\times 2U_0\left(T-\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{T}\times\frac{2U_0}{T}\int_{T/2}^{T}t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2U_0}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2}+U_0-\frac{2U_0}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^{T}\\
&=\frac{2U_0}{T^2}\left(\frac{T^2}{8}-0\right)+U_0-\frac{2U_0}{T^2}\left(\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{8}\right)\\
&=\frac{U_0}{4}+U_0-\frac{3U_0}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle u\rangle=\frac{U_0}{2}}$$

Exercice 4 : Spectre d'une somme et d'un produit de signaux

1 $u_\mathrm{s}(t)=U_1\cos(2\pi\,f_1\,t)+U_2\cos(2\pi\,f_2\,t+\varphi)$

1.a Voir figure 3.

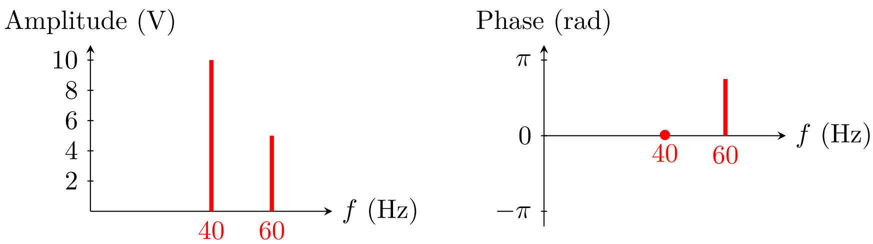


Figure 3 – Spectre du signal somme.

1.b La période T du signal complet est le plus petit temps au bout duquel il se répète identique à lui-même, ce qui implique nécessairement que $u_1(t+T)=u_1(t)$ et $u_2(t+T)=u_2(t)$ ... mais attention : T n'est pas la période de u_1 et u_2, seulement un multiple de leur période. Ainsi, le signal somme u_s est périodique s'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$T=n_1T_1=n_2T_2\,.$$

Comme $T_1/T_2=f_2/f_1=3/2$, on constate que les valeurs $n_1=2$ et $n_2=3$ conviennent et que ce sont les plus petites. Ainsi,

$$\boxed{T=2T_1=3T_2=50\,\mathrm{ms}\qquad\text{soit}\qquad f=\frac{f_1}{2}=\frac{f_2}{3}=20\,\mathrm{Hz}\,.}$$

Il s'agit donc d'un signal qui n'a pas de fondamental mais seulement deux harmoniques de rang 2 et 3.

> *Le théorème de Fourier pour un signal harmonique montre que la fréquence d'un signal est forcément inférieure ou égale à celle de ses composantes harmoniques. Par conséquent, la période d'un signal est forcément* supérieure ou égale *à la période de chacune de ses harmoniques.*

2.a On calcule directement

$$u_\mathrm{p}(t)=k\,U_1\cos(2\pi\,f_1\,t)\,\cos(2\pi\,f_2\,t+\varphi)=\frac{1}{2}k\,U_1\,U_2\Big\{\cos\left[2\pi(f_1+f_2)t)+\varphi\right]+\cos\left[2\pi(f_1-f_2)t-\varphi\right]\Big\}$$

Ainsi, la tension produit apparaît comme une somme de deux tensions harmoniques. Pour faire apparaître les fréquences il faut réécrire chacune de ces tensions sous la forme $\cos(2\pi f_it+\varphi_i)$ avec $f_i>0$, car une fréquence est toujours positive. La parité du cosinus rend cette réécriture très simple : $\cos(-x)=\cos x$. Ici, $f_2>f_1$, donc

$$\boxed{u_\mathrm{p}(t)=\frac{1}{2}k\,U_1\,U_2\Big\{\cos\left[2\pi(f_1+f_2)t)+\varphi\right]+\cos\left[2\pi(f_2-f_1)t+\varphi\right]\Big\}}$$

Ainsi, la tension produit est **la somme de deux tensions harmoniques de même amplitude et de fréquences respectives $f_1+f_2=100\,\mathrm{Hz}$ et $f_2-f_1=20\,\mathrm{Hz}$**.

> *Oublier de prendre une fréquence positive conduit également à une erreur dans le signe de la phase initiale.*

2.b Voir figure 4.

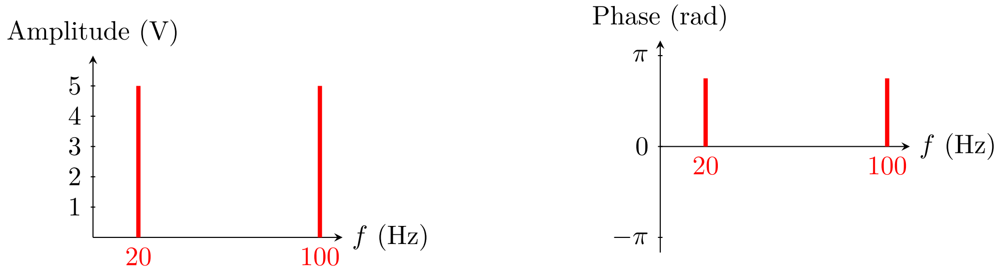


Figure 4 – Spectre du signal produit.

2.c Si les deux tensions étaient synchrones, alors la fréquence minimale serait nulle : **la tension produit contiendrait une composante continue**, et serait donc en fait un signal harmonique décalé (de moyenne non nulle).

Exercice 5 : Mesure d'un déphasage à l'oscilloscope

1 Commençons par étudier la tension v_1.

- Elle est symétrique par rapport à l'axe des temps donc $\boldsymbol{\langle v_1 \rangle = 0{,}0\,\mathrm{V}}$.
- Sa valeur maximale vaut environ 1,3 V, donc **v_1 a pour amplitude 1,3 V**.
- La courbe coupe l'axe des temps dans le sens montant pour $t = -4{,}1\,\mathrm{ms}$, puis $-1{,}1\,\mathrm{ms}$, puis $1{,}9\,\mathrm{ms}$, ... On en déduit que **le période de la tension v_1 vaut $T_1 = 3{,}0\,\mathrm{ms}$**. Évidemment, on peut aussi regarder la position de minima, des maxima, etc.
- Par conséquent, **sa fréquence vaut $f_1 = 1/T_1 = 3{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$**.

Procédons de même pour la tension v_2.

- La tension v_2 est comprise entre $-0{,}6\,\mathrm{V}$ et $1\,\mathrm{V}$. Comme elle est harmonique, sa moyenne s'en déduit directement et vaut $\boldsymbol{\langle v_2 \rangle = 0{,}2\,\mathrm{V}}$.
- À partir de la lecture de la valeur maximale 1,0 V (ou minimale !), on en déduit que **l'amplitude vaut 0,8 V**.
- La période et la fréquence valent à nouveau **$T_2 = 3{,}0\,\mathrm{ms}$ et $f_2 = 3{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$**

Les deux tensions ont la même fréquence, **elles sont donc synchrones** par définition.

> *Une difficulté dans les questions de ce type est de donner aux valeurs numériques une précision raisonnable : ici il n'est pas possible de faire mieux que 0,1 ms et 0,1 V. Par conséquent, certaines valeurs n'ont qu'un seul chiffre significatif alors que d'autres en ont deux. Il ne faut pas pour autant oublier les « ,0 » lorsque c'est pertinent.*
>
> *En outre, vous ne devez surtout pas oublier de donner des unités correctes à toutes les valeurs !*

2 La tension v_2 atteint son maximum avant v_1 : **v_2 est en avance de phase sur v_1**. Pour mesurer le décalage temporel Δt, le plus simple est de regarder les instants où les courbes atteignent deux maxima les plus proches, par exemple en 2,6 ms pour v_1 et 1,6 ms pour v_2. Ainsi,

$$\boxed{\Delta t_{21} = -1{,}0\,\mathrm{ms}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\varphi_{21} = +2\pi f\,|\Delta t_{21}| = \frac{2\pi}{3}}$$

> *Un autre point de repère, a priori un peu plus précis, consiste à repérer les instants où les tensions atteignent leur valeur moyenne* avec une pente de même signe. *Attention, c'est le passage par la valeur moyenne qui importe, pas celui par l'axe des temps. Pour éviter cet écueil, les méthode utilisant les maxima est plus fiable.*
>
> *Attention au signe tant du décalage temporel que du déphasage. On étudie v_2 par rapport à v_1 et c'est v_2 qui passe par son maximum le premier, le décalage temporel est négatif mais le déphasage est positif. On peut voir ici l'intérêt de retenir la relation avec des valeurs absolues mais de contrôler le signe à la main par lecture du chronogramme !*

> *Enfin, pour éviter des erreurs bêtes avec les signes, il est recommandé de lire les valeurs des temps dans la partie positive de l'axe.*

3 La dépendance en temps des deux tensions est de la forme $\cos(2\pi\, f\, t + \varphi_i)$, avec $i = 1$ ou 2. On cherche ici les deux phases φ_i. Pour cela, l'idée est de se ramener à une mesure sur le chronogramme qui s'apparente à une mesure de déphasage par rapport à une tension de référence fictive, qu'on notera 0. Le déphasage de la tension i par rapport à la tension 0 vaut

$$\Delta\varphi_{i0} = \varphi_i - \varphi_0$$

et il est égal à φ_i si $\varphi_0 = 0$. Cette tension de référence est donc du type $A_0 \cos(\omega t)$. Le point de repère à considérer pour définir correctement le décalage temporel est le maximum de cette fonction, qui se trouve en $t = 0$. Pour connaître les phases initiales, il suffit donc de lire sur le chronogramme l'instant le plus proche de $t = 0$ où les tensions atteignent leurs valeurs maximales. On lit respectivement $t_1 = -0{,}4\,\mathrm{ms}$ et $t_2 = -1{,}4\,\mathrm{ms}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1 = -2\pi f(t_1 - 0) = 0{,}7\,\mathrm{rad} \\ \varphi_2 = -2\pi f(t_2 - 0) = 2{,}9\,\mathrm{rad} \end{cases}}$$

Là encore, les signes peuvent être contrôlés à la main : les deux tensions atteignent leur plus proche maximum avant $t = 0$, et sont donc en avance de phase par rapport à la tension fictive de référence.