



# Montages à ALI

## I - Compétition de rétroaction

1 L'ALI compte **deux rétroactions**, l'une **positive** et l'autre **négative**, qui entrent en compétition : son régime de fonctionnement dépend des autres éléments du montage.

2 L'ALI étant idéal, la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée  $\ominus$  s'écrit

$$\frac{e - v^-}{R} + \frac{s - v^-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{v^- = \frac{e + s}{2}}.$$

En identifiant un pont diviseur de tension, on trouve

$$\frac{v^+}{s} = \frac{R}{R + kR} \quad \text{soit} \quad \boxed{v^+ = \frac{1}{k + 1}s}.$$

3 Supposons le fonctionnement linéaire et cherchons à quelle(s) condition(s) cette hypothèse est valable. De la question précédente on déduit

$$\varepsilon = v^+ - v^- = \left( \frac{1}{k + 1} - \frac{1}{2} \right) s - \frac{e}{2} = \frac{1 - k}{2(k + 1)} s - \frac{e}{2}.$$

Ainsi,

$$\underline{S} = \underline{H}_{\text{ALI}} \varepsilon = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} \left( \frac{1 - k}{2(k + 1)} \underline{S} - \frac{\underline{E}}{2} \right).$$

En regroupant,

$$\left( 1 + j\omega\tau - \frac{A_0(1 - k)}{2(k + 1)} \right) \underline{S} = -\frac{A_0}{2} \underline{E} \quad \text{soit} \quad 2 \left( 1 + j\omega\tau + \frac{A_0(k - 1)}{2(k + 1)} \right) \underline{S} = -A_0 \underline{E}$$

ce qui conduit au résultat annoncé

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-A_0}{2 + \frac{k - 1}{k + 1} A_0 + 2j\omega\tau}}.$$

Pensez à la simplicité des calculs, en limitant les fractions de fractions de fractions ... et en vous rappelant que le risque d'erreur augmente exponentiellement avec la taille du dénominateur !

Le régime linéaire est stable si tous les coefficients du polynôme en  $j\omega$  du dénominateur sont de même signe. Comme  $2\tau > 0$ , le montage est stable si

$$\boxed{2 + \frac{k - 1}{k + 1} A_0 > 0}.$$

Attention, il n'y a bien que deux termes au dénominateur (et donc deux coefficients et non pas trois) : c'est le polynôme en  $j\omega$  qu'il faut analyser, dont les coefficients des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 sont respectivement

$$a_0 = 2 + \frac{k - 1}{k + 1} A_0 \quad \text{et} \quad a_1 = 2\tau.$$

4 Le gain statique est de l'ordre de  $10^5$ - $10^6$  en fonction des modèles d'ALI. La condition de stabilité s'écrivant également

$$\frac{k - 1}{k + 1} > \frac{-2}{A_0} \simeq 0$$

on peut approximer l'inégalité par

$$k \geq 1.$$

5 Un ALI de gain infini en régime linéaire vérifie  $v^+ = v^-$ , soit

$$\frac{1}{k+1}s = \frac{e+s}{2} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\right)s = \frac{e}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{1-k}{2(1+k)}s = \frac{e}{2},$$

ce que l'on peut finalement écrire

$$s = \frac{1+k}{1-k}e.$$

Cette relation est représentée graphiquement figure 1. La fonction de transfert  $s/e$  est réelle et inférieure à  $-1$  : le signal de sortie est inversé par rapport au signal d'entrée, et amplifié ... jusqu'à ce que l'ALI sature. Le montage est bien un **amplificateur inverseur**.

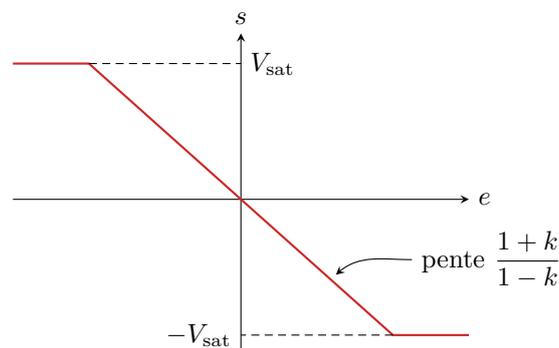


Figure 1 – Relation entrée-sortie pour  $k > 1$ .

6 Supposons l'ALI en saturation haute :  $s = +V_{\text{sat}}$ . Il y reste tant que

$$v^+ > v^- \quad \text{soit} \quad \frac{1}{1+k}V_{\text{sat}} > \frac{e+V_{\text{sat}}}{2} \quad \text{donc} \quad e < \left(\frac{2}{1+k} - 1\right)V_{\text{sat}}$$

ce qui s'écrit

$$e < \frac{1-k}{1+k}V_{\text{sat}} = \beta V_{\text{sat}}.$$

Supposons maintenant l'ALI en saturation basse :  $s = -V_{\text{sat}}$ . Il y reste tant que

$$v^- > v^+ \quad \text{soit} \quad \frac{e-V_{\text{sat}}}{2} > -\frac{1}{1+k}V_{\text{sat}} \quad \text{donc} \quad e > \left(1 - \frac{2}{1+k}\right)V_{\text{sat}}$$

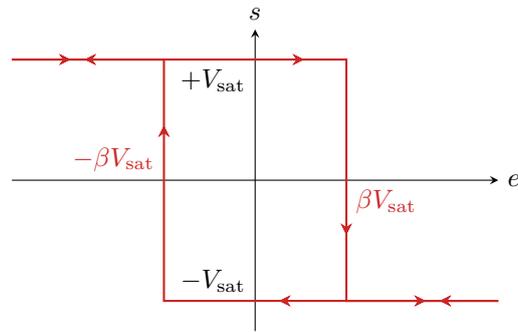
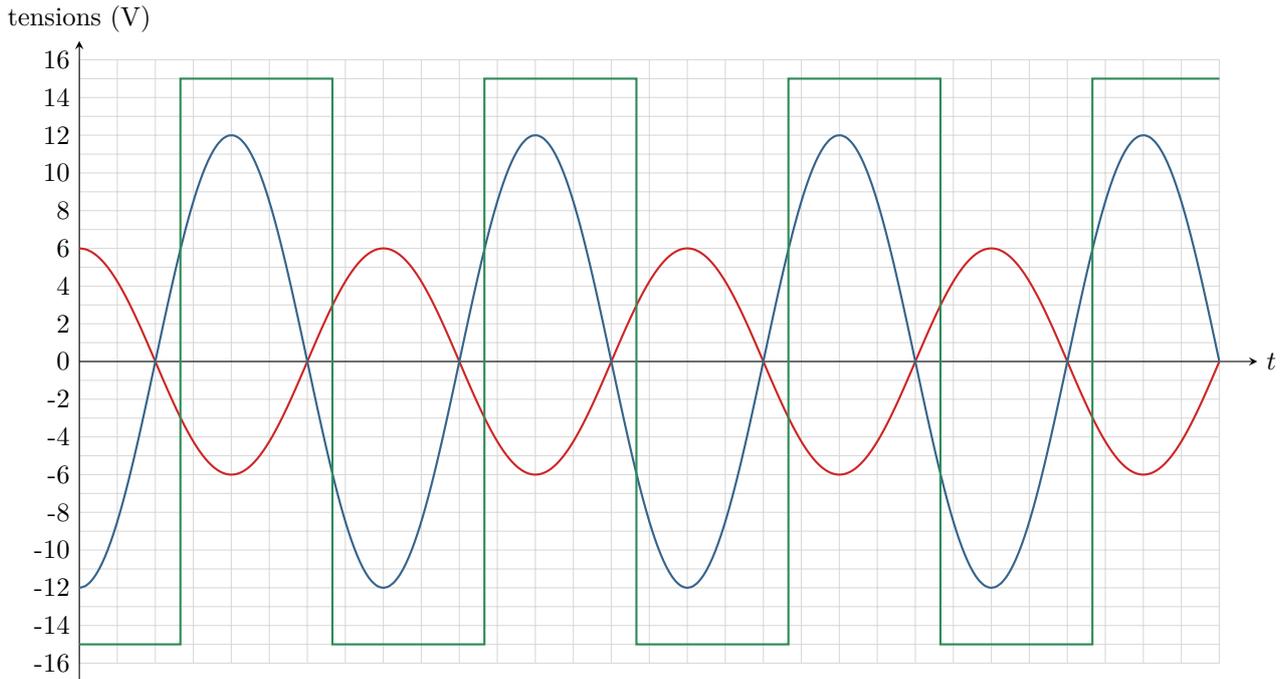
ce qui s'écrit

$$e > \frac{k-1}{k+1}V_{\text{sat}} = -\beta V_{\text{sat}}.$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** Il est indispensable pour cette question de repartir des expressions générales de  $v^-$  et  $v^+$  établies à la question 2. En revanche, la relation entre  $s$  et  $e$  établie question 5 n'est plus valable (même en remplaçant  $s$  par  $\pm V_{\text{sat}}$  !) car elle a été établie dans l'hypothèse de régime linéaire ... qui n'est plus valable ici.

7 Cf. figure 2. Il s'agit d'un **comparateur à hystérésis inverseur**.

8 Pour  $k = 2$ , le montage fonctionne en amplificateur inverseur, de gain égal à  $-2$ ; alors que pour  $k = 2/3$  il fonctionne en comparateur à hystérésis, dont les tensions de basculement valent  $\pm 3V$ . On en déduit le tracé de la figure 3.

Figure 2 – Relation entrée-sortie pour  $k < 1$ .Figure 3 – Tensions de sortie du montage pour deux valeurs de  $k$ . La courbe bleue correspond à  $k = 3$  (fonctionnement linéaire de l'ALI), la courbe verte à  $k = 2/3$  (fonctionnement en saturation).

## II - Oscillateur à pont de Wien

*inspiré oral banque PT*

9 Utilisons par exemple la fonction de transfert. Le bloc RC parallèle a pour admittance

$$\underline{Y}_{RC} = jC\omega + \frac{1}{R}.$$

Ainsi, en identifiant un pont diviseur,

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RC} + R + \frac{1}{jC\omega}} e \\ &= \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(jC\omega + \frac{1}{R}\right)} e \\ \underline{s} &= \frac{1}{1 + jRC\omega + 1 + 1 + \frac{1}{jRC\omega}} e \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$3\underline{s} + jRC\omega \underline{s} + \frac{1}{jRC\omega} \underline{s} = \underline{e}$$

$$3jRC\omega \underline{s} + (j\omega)^2(RC)^2 \underline{s} + \underline{s} = jRC\omega \underline{e}$$

Dans le domaine temporel,

$$3RC \frac{ds}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2s}{dt^2} + s = RC \frac{de}{dt}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} s = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}.$$

On peut alors identifier  $\omega_0 = 1/RC$  et aboutir au résultat cherché,

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0 \frac{de}{dt} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} .}$$

**10** L'ALI possède une boucle de rétroaction négative, il peut donc fonctionner en régime linéaire. On a alors  $v_- = v_+ = s$ , et  $e$  est la tension de sortie de l'ALI. Par un pont diviseur,

$$s = \frac{R'}{R' + \alpha R'} e \quad \text{d'où} \quad e = (1 + \alpha)s .$$

En réinjectant dans l'équation différentielle de la question précédente,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0(1 + \alpha) \frac{ds}{dt}$$

et ainsi

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + (2 - \alpha)\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 .}$$

**11** Des oscillations apparaissent dans le montage si l'amplitude de  $s$  et  $e$  croît spontanément à partir du bruit électronique, ce qui se traduit par l'instabilité de l'équation ci-dessus, atteinte lorsque  $2 - \alpha < 0$ , soit

$$\boxed{\alpha > 2 .}$$

Si ces oscillations sont quasi-sinusoïdales, le terme d'amortissement peut être négligé une fois le régime établi atteint. L'équation devient alors

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s \simeq 0$$

ce qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$ , qui est donc la pulsation des oscillations. En revanche, **elles ne peuvent pas être purement sinusoïdales** : si  $\alpha = 2$  exactement, alors l'équation est stable et les oscillations ne peuvent pas démarrer.

**12** L'équation étant instable, l'amplitude des oscillations ne cesse de croître ... jusqu'à ce que l'ALI ne puisse plus l'amplifier en raison de la saturation. À l'instant  $t_0$  où l'ALI sature, la relation entrée-sortie en régime linéaire est en limite de validité. On a toujours  $e(t_0) = (1 + \alpha)s(t_0)$  avec  $e(t_0) = \pm V_{\text{sat}}$ , soit

$$\boxed{s(t_0) = \pm \frac{V_{\text{sat}}}{1 + \alpha} .}$$

**13** En régime de saturation,  $e = \pm V_{\text{sat}} = \text{cte}$ , donc l'équation devient

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 .}$$

Le polynôme caractéristique de cette équation s'écrit

$$r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

et son discriminant  $\Delta$  vaut donc

$$\Delta = 9\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2 > 0.$$

Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent donc

$$r_{\pm} = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{5\omega_0^2}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \omega_0.$$

L'équation étant sans second membre, la solution particulière est nulle, d'où on déduit pendant la phase de fonctionnement non-linéaire

$$s(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}.$$

L'ALI retrouve un fonctionnement linéaire lorsque  $v_+ = s$  redevient égal à  $v_- = \pm V_{\text{sat}}/(1 + \alpha)$ . Or le système est stable, donc la solution  $s(t)$  tend forcément vers la solution particulière, qui est nulle. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'ALI **retrouve nécessairement un régime linéaire**, quel que soit son état de saturation.

**14** La courbe en pointillé présente des paliers de saturation, au contraire de la courbe en trait plein : celle en pointillé représente donc **la sortie de l'ALI, c'est-à-dire  $e$** , et celle en trait plein **représente  $s$** . On lit graphiquement

$$T \simeq 0,5 \text{ ms} \quad \text{d'où} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \simeq 13 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Enfin, en se plaçant à l'instant  $t_0$  où l'ALI commence à saturer, on lit

$$e(t_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{V_{\text{sat}}} = 13 \text{ V} \quad \text{et} \quad s(t_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{courbe}}}{\frac{V_{\text{sat}}}{1 + \alpha}} = 4 \text{ V}$$

d'où on déduit

$$\alpha = \frac{e(t_0)}{s(t_0)} - 1 \simeq 2,2.$$

*Plus largement, il est possible de se placer à tout instant où l'ALI fonctionne en régime linéaire à condition de lire correctement les valeurs associées. En revanche, il n'est pas possible de considérer l'instant où  $s$  est maximale car il est atteint lors d'une phase de saturation de l'ALI. Or lorsque l'ALI sature,  $e \neq (1 + \alpha)s$  et il n'est donc pas possible d'en déduire  $\alpha$ .*