BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

DM 8 – à rendre mercredi 27 novembre *Correction*

Théorème de Bernoulli

Vidange d'un ballon d'eau chaude

PT B 2024

19 Cours La relation de Bernoulli appliquée entre l'entrée A et la sortie B d'un volume de contrôle s'écrit dans ces hypothèses

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + g z_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + g z_B$$

où P_A et P_B désignent les pressions en A et B, v_A et v_B les vitesses débitantes, z_A et z_B les altitudes mesurées le long d'un axe vertical ascendant.

> *La question demandant simplement de restituer une formule de cours, les points ne sont attribués que si toutes les notations sont clairement définies. On peut simplement se permettre de ne pas définir les notations évidentes comme ρ et g, éventuellement P, en revanche le fait qu'il s'agisse de vitesses débitantes et que z soit orienté vers le haut doit apparaître dans la réponse.*

20 Classique Par conservation du débit volumique entre la surface libre de l'eau (vitesse v_s, section πR^2) et le robinet de vidange (vitesse v_0, section πr^2),

$$\cancel{\pi} R^2 \, v_\mathrm{s} = \cancel{\pi} r^2 \, v_0 \,.$$

Comme une vitesse débitante est positive mais que le niveau d'eau descend,

$$v_\mathrm{s} = \left| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_0 = -\frac{R^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \,.}$$

> *La question est facile et le résultat donné, la réponse se doit d'être bien justifiée. Il faut impérativement préciser les sections entre lesquelles vous écrivez la conservation du débit, et justifier clairement la présence du signe $\ominus$.*

21 Classique La surface libre en $z(t)$ et la sortie en $z = 0$ se trouvent toutes deux à pression atmosphérique. Ainsi, la relation de Bernoulli se simplifie en

$$\frac{\cancel{P_\mathrm{atm}}}{\rho} + \frac{v_z^2}{2} + g z = \frac{\cancel{P_\mathrm{atm}}}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \times 0$$

d'où

$$\boxed{v_0 = \sqrt{v_z^2 + 2gz} \,.}$$

22 Classique D'après la question 20,

$$v_0 = -\frac{R^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad v_0 = 10^4 \, v_z \,.$$

On peut donc négliger v_z dans l'expression de v_0, et ainsi

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gz} \,.}$$

23 En reprenant l'équation de conservation du débit,

$$\sqrt{2gz} = -\frac{R^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \,.$$

Par séparation des variables,

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{R^2}{r^2}\int_{z(0)=H_0}^{z(t)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2gz}} = -\frac{R^2}{r^2}\times\frac{2}{\sqrt{2g}}\int_{H_0}^{z(t)}\frac{1}{2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$$

ce qui donne

$$t = -\frac{R^2}{r^2}\times\frac{2}{\sqrt{2g}}\times\left[\sqrt{z}\right]_{H_0}^{z(t)} = -\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z(t)}-\sqrt{H_0}\right)$$

> *Ne jamais hésiter à factoriser voire à faire apparaître des constantes supplémentaires dans une intégrale pour identifier une primitive de référence. Mais attention, si vous divisez par 2 dans l'intégrale il ne faut pas oublier de multiplier par 2 devant.*

On isole ensuite,

$$\sqrt{z(t)} = \sqrt{H_0} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}t$$

et ainsi

$$\boxed{z(t) = \left(\sqrt{H_0}-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right)^2 .}$$

24 **Classique** Lorsque le ballon est complètement vidangé au bout d'une durée T_v, alors $z(t{=}T_\mathrm{v}) = 0$. Ainsi,

$$T_\mathrm{v} = -\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{0}-\sqrt{H_0}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_\mathrm{v} = \frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

25 Numériquement,

$$T_\mathrm{v} = \left(\frac{5\cdot10^{-1}}{5\cdot10^{-3}}\right)^2\sqrt{\frac{2\times2}{10}} = 10^4\times\frac{2}{\sqrt{10}} \simeq 10^4\times\frac{2}{3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_\mathrm{v} = 7\cdot10^3\,\mathrm{s}\simeq 2\ \text{heures}\,.}$$

26 La tuyauterie du plancher chauffant ayant une longueur totale de 120 m, la perte de charge totale écrite sous forme de hauteur vaut

$$\Delta h = 35\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{m}^{-1}\times120\,\mathrm{m} = 4{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Appliquons la relation de Bernoulli entre l'entrée E et la sortie S du plancher chauffant, prenant en compte les pertes de charge et la puissance $\mathcal{P}$ fournie par le circulateur à l'eau de chauffage,

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_S}{\rho}+\frac{v_S^2}{2}+gz_S\right)-\left(\frac{P_E}{\rho}+\frac{v_E^2}{2}+gz_E\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{i} - D_\mathrm{m}g\,\Delta h\,.$$

En considérant que la prise et le retour d'eau dans le ballon de réserve se font à la même altitude, donc à la même pression, et à la même vitesse, la relation de Bernoulli se simplifie en

$$\mathcal{P}_\mathrm{i} - D_\mathrm{m}g\,\Delta h = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{i} = \rho\,D_\mathrm{v}\,g\,\Delta h\,.}$$

Le débit volumique vaut numériquement

$$D_\mathrm{v} = 6\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{min}^{-1} = 6\frac{10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{60\,\mathrm{s}} = 1\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_\mathrm{i} = 1\cdot10^3\times1\cdot10^{-4}\times10\times4{,}2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{i} = 4{,}2\,\mathrm{W}\,.}$$

27 Deux hypothèses simplificatrices peuvent être remises en cause :
- ▷ d'une part, les pertes de charge singulières ont été négligées ;
- ▷ d'autre part, la prise d'eau ne se fait pas nécessairement à la même hauteur que le retour dans le ballon de réserve.

En pratique, la prise d'eau se fait toujours au dessus du retour : puisque l'eau chaude est moins dense que l'eau froide, c'est toujours le haut du ballon qui est à la température la plus élevée. L'eau descend donc en altitude, ce qui se fait « tout seul » et bien que la deuxième hypothèse soit raisonnable à première vue elle n'est pas pertinente en pratique.

Au delà de ces hypothèses physiques, je pense aussi que les préconisations sont généralement surdimensionnées. Cela garantit que le débit d'eau chaude est au minimum *égal à la valeur recommandée, souvent un peu supérieur, ce qui n'est pas gênant pour l'usager puisque le chauffage délivre alors une puissance un peu plus élevée que celle attendue. En revanche un débit inférieur, conduisant à une puissance inférieure elle aussi, serait néfaste pour le confort de l'usager et doit donc être évité. Notons que ce surdimensionnement des préconisations n'est pas forcément néfaste, car les pertes de charge singulières diffèrent d'une installation à l'autre, et doivent pouvoir être compensées par le circulateur dans tous les cas.*

28 Pour que la température de l'eau de chauffage soit la plus homogène possible dans toute la pièce, il est préférable d'utiliser une **pose en escargot**. Dans le cas de la pose en serpentin du document 4, l'eau serait chaude au fond de la pièce puis refroidirait progressivement au contact de l'air de la pièce et serait donc plus froide à l'entrée, qui ne serait pas chauffée de la même façon, ce qui n'est pas souhaitable.