

Filtrage

Filtre de Hartley

1 • **Limite basse fréquence** : la bobine équivaut à un fil, donc $s = 0$.

• **Limite haute fréquence** : le schéma équivalent ne suffit pas ici, car les deux bobines sont des interrupteurs ouverts et il n'est pas possible de déterminer la tension aux bornes de l'une sans la connaître aux bornes de l'autre. Il est donc nécessaire d'être plus précis, en écrivant un pont diviseur de tension impliquant la tension $\underline{u}$ aux bornes du condensateur :

$$\underline{s} = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{u}.$$

Comme le condensateur équivaut à un fil alors $\underline{u} \rightarrow 0$ dans la limite haute fréquence, donc $\underline{s}$ également.

• **Conclusion** : les signaux de basse et haute fréquence sont coupés, le filtre est donc un passe-bande.

2 Comme indiqué précédemment,

$$\frac{\underline{s}}{\underline{u}} = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} = \frac{1}{2}.$$

L'association des deux bobines et du condensateur équivaut à une admittance équivalente $\underline{Y}_{\text{eq}}$ soumise à la tension $\underline{u}$, avec

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = jC\omega + \frac{1}{2jL\omega}.$$

Par un pont diviseur appliqué à cette admittance équivalente,

$$\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{R}{2jL\omega}}.$$

En réintroduisant $\underline{s}$, on en déduit

$$\underline{H} = \frac{1/2}{1 + jRC\omega + \frac{R}{2jL\omega}}.$$

On identifie alors

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \frac{R}{2L} \end{cases}$$

Par produit et quotient, on trouve

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 7,07 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}} = 70,7.}$$

3 Limite des basses fréquences $x \ll 1$:

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{jx H_0}{Q} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q} = 20 \log x - 43.$$

Limite des hautes fréquences $x \gg 1$:

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{jQx} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} \sim -20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q} = -20 \log x - 43.$$

À la résonance $x = 1$:

$$\underline{H} = H_0 \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 = -6 \text{ dB}$$

On en déduit le tracé de la figure 1.

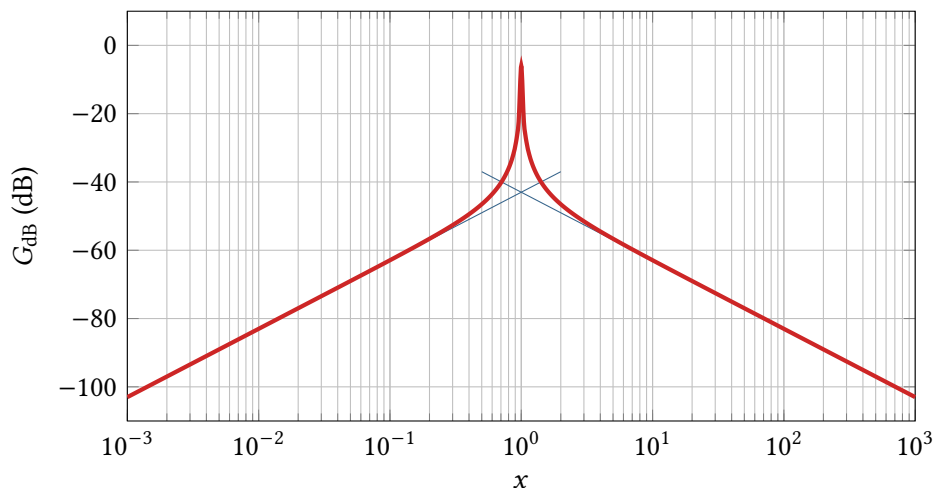


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre de Hartley.

4 En utilisant les équivalents déterminés précédemment,

$$\Delta\varphi(x \ll 1) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \Delta\varphi(x=1) = 0 \quad \Delta\varphi(x \gg 1) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

5 Compte tenu des équivalents de la fonction de transfert, le filtre agit en dérivateur pour les signaux de basse fréquence ($\underline{H} \propto j\omega$) et en intégrateur pour les signaux de haute fréquence ($\underline{H} \propto 1/j\omega$). Cependant, le gain est alors très faible et les signaux très atténués.

6 Comme $e(t)$ est un signal créneau symétrique, alors $e(t)^2 = E_m^2 = \text{cte}$. Ainsi,

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\langle e(t)^2 \rangle} = \sqrt{\langle E_m^2 \rangle} = E_m.$$

Même si le développement en série de Fourier est donné, réfléchir un peu avant de se lancer dans le théorème de Parseval n'est pas inutile ...

7 Spectre représenté figure 2.

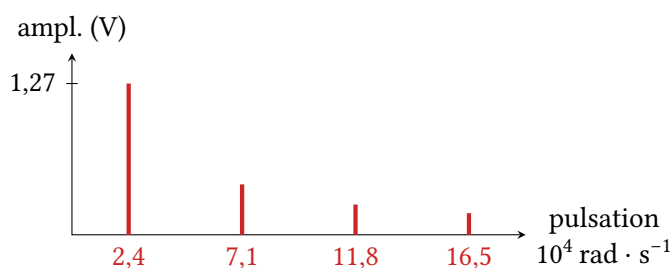


Figure 2 – Spectre du signal créneau e .

8 Calculons à partir de la fonction de transfert

$$|\underline{H}(x)| = \frac{H_0}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

Harmonique n	1	3	5
Pulsation réduite x	1/3	1	5/3
$ \underline{H}(x) $	$2,65 \cdot 10^{-3}$	1/2	$6,6 \cdot 10^{-3}$
Amplitude en sortie	$3 \cdot 10^{-3} \text{ V}$	0,21 V	$1,6 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

Il semble donc raisonnable d'approximer le signal de sortie simplement par son harmonique de rang 3, qui n'est pas déphasée par le filtre,

$$s(t) \simeq -\frac{4E_m}{3\pi} \times \frac{1}{2} \times \sin(3\Omega t) \simeq -\frac{2E_m}{3\pi} \sin(3\Omega t).$$

Numériquement, puisque $E_m = 1 \text{ V}$, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude 0,21 V, de période égale au tiers de celle du signal créneau d'entrée, et il s'annule en $t = 0$. On en déduit l'allure représentée figure 3.

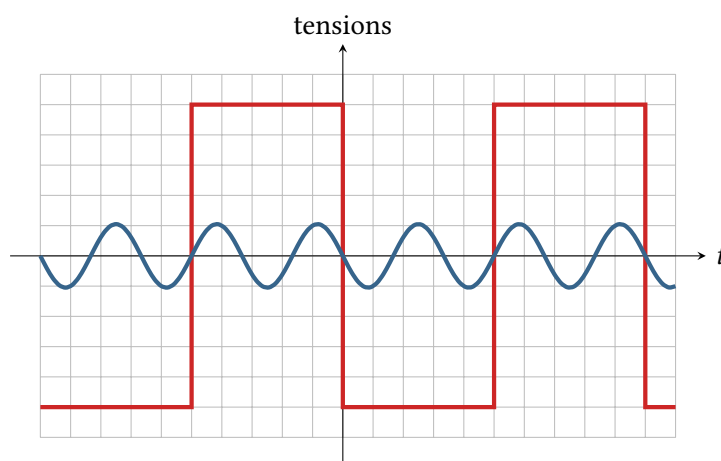


Figure 3 – Signal de sortie du filtre.