Correction

Oscillateur harmonique

Mesure de masse par micro-levier oscillant

A - Étude des oscillations

- **Système :** masse m équivalente au micro-levier.
- **Référentiel :** terrestre supposé galiléen.
- **Repérage :** unidimensionnel le long de l'axe (Oz),

$$\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e}_z \qquad \vec{v} = \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e}_z\,.$$

- **Bilan des forces :**
  - poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$;
  - force exercée par le ressort du bas : $\vec{F}_1 = -k(z-\ell_0)\,\vec{e}_z$;
  - force exercée par le ressort du haut : $\vec{F}_2 = -k(h-z-\ell_0)(-\vec{e}_z) = +k(h-z-\ell_0)\,\vec{e}_z$.

1 À l'équilibre,

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -mg - k(Z_0-\ell_0) + k(h-Z_0-\ell_0) = 0$$

d'où on isole

$$\boxed{Z_0 = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}\,.}$$

> *De nombreux tests de vraisemblance sont envisageables sur cette expression : $h/2$ correspond au milieu du segment reliant les deux points d'attache, il est donc logique que le poids décale la position d'équilibre en dessous, celle-ci est d'autant plus basse que la masse est élevée, d'autant plus haute que les ressorts sont raides et donc difficiles à déformer, etc.*

2 Par application du PFD en projection sur (Oz),

$$m\ddot{z} = -mg - k(z-\ell_0) + k(h-z-\ell_0)$$
$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = -g + \frac{kh}{m}$$
$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{2k}{m}\left(\frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}\right)$$

ce qui permet de réécrire

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 Z_0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} \\ Z_0 = \dfrac{h}{2} - \dfrac{mg}{2k} \end{cases}}$$

3 La pulsation propre permet de déterminer la fréquence par

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 22{,}5\,\text{kHz}\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

4 • **Forme générale des solutions :** la position d'équilibre Z_0 est solution particulière, d'où

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + Z_0\,.$$

Position initiale :

$$z(t=0) \underset{\text{CI}}{\uparrow} = Z_0 \underset{\text{expr}}{\uparrow} = A + Z_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = 0\,.$$

Vitesse initiale : par dérivation, et comme $A = 0$,

$$\dot{z}(t) = \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

si bien que

$$\dot{z}(t=0) \underset{\text{CI}}{\uparrow} = v_0 \underset{\text{expr}}{\uparrow} = \omega_0 B \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0}\,.$$

• **Conclusion :**

$$\boxed{z(t) = Z_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.}$$

5 Voir figure 1.

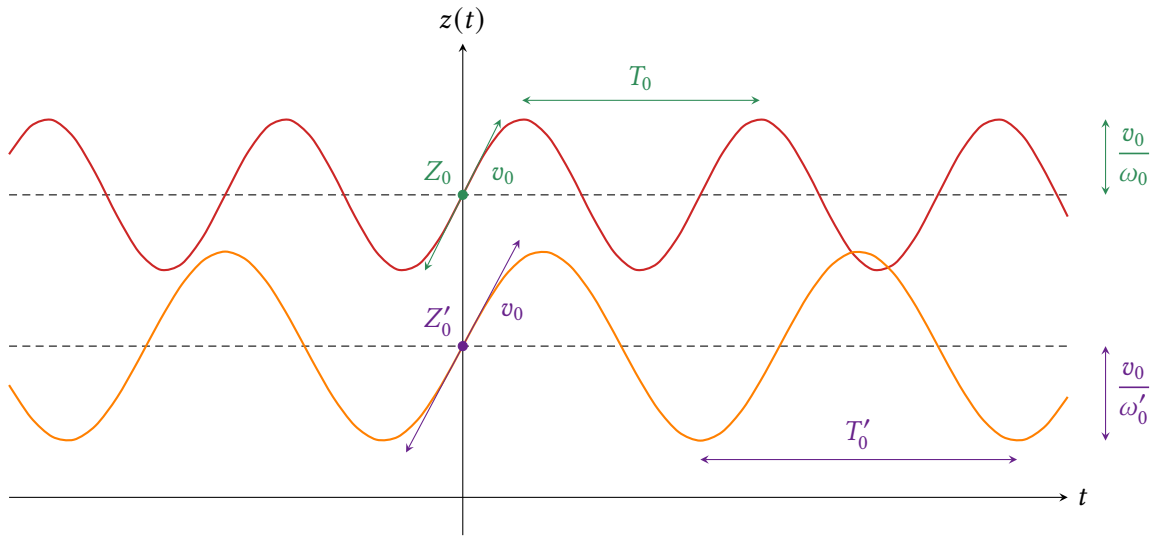


Figure 1 – Position du système au cours du temps. La courbe rouge correspond à une masse m, la courbe orange à une masse $m' > m$.

6 Pour une masse $m' > m$, la position d'équilibre est plus basse $Z_0' < Z_0$, la pulsation et donc la fréquence des oscillations est plus faible $f_0' < f_0$ donc la période plus grande $T_0' > T_0$, et si la vitesse initiale reste la même alors leur amplitude v_0/ω_0' est plus grande.

B - Mesure de la masse déposée

7 Il suffit d'appliquer la formule donnée :

$$\Delta z = Z_0 - Z_0' + A\left[\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0' t)\right]$$

$$\boxed{\Delta z = Z_0 - Z_0' + 2A\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_0'}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_0'}{2}t\right)\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> *Il est possible d'aller un peu plus loin en remarquant que*
>
> $$Z_0 - Z_0' = \left(\frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}\right) - \left(\frac{h}{2} - \frac{(m+\Delta m)g}{2k}\right) = \frac{\Delta m\, g}{2k}\,.$$

8 Le sinus oscille avec une pulsation plus faible que le cosinus, puisque $\omega_0 - \omega_0' < \omega_0 + \omega_0'$. Le terme d'enveloppe, qui représente l'amplitude instantanée des oscillations, est donc

$$A(t) = 2A\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_0'}{2}t\right)$$

alors que le terme responsable des oscillations rapides est celui avec le cosinus.

> *En toute rigueur, une amplitude est positive par convention, et il est impropre d'appeler la fonction d'enveloppe $A(t)$ « amplitude instantanée » des oscillations, puisqu'elle peut prendre des valeurs négatives. C'est toutefois très parlant !*

9 Les équations sont identiques à la partie précédente, en considérant un levier de masse $m + \Delta m$. Ainsi,

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\times\frac{m}{m+\Delta m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\Delta m}{m}}} = \omega_0\left(1+\frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}\,.$$

Diviser par 2π permet d'identifier

$$\boxed{f_0' = f_0\left(1+\frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}\,.}$$

10 En utilisant le développement limité,

$$f_0' \simeq f_0\left(1-\frac{\Delta m}{2m}\right) \qquad \text{soit} \qquad f_0\frac{\Delta m}{2m} = f_0 - f_0' \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta m = 2m\frac{\Delta f}{f_0}\,.}$$

11 La masse $m = 1\cdot10^{-11}\,\text{kg}$ et la fréquence $f_0 = 22{,}5\,\text{kHz}$ se déduisent des données de l'énoncé. Pour déterminer Δf, on utilise la courbe : l'enveloppe des oscillations $A(t)$ a une fréquence

$$f_A = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0 - \omega_0'}{2} = \frac{f_0 - f_0'}{2} = \frac{\Delta f}{2}\,.$$

Sachant qu'un motif correspond à une demi-période de l'enveloppe $A(t)$ (un cosinus présente une partie positive et une partie négative), on lit graphiquement

$$T_A = 5{,}0\,\text{ms} \qquad \text{d'où} \qquad \Delta f = \frac{2}{T_A} = 400\,\text{Hz}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{\Delta m = 3{,}6\cdot10^{-13}\,\text{kg}\,.}$$

La mesure différentielle est plus précise qu'une mesure directe car la fréquence à mesurer est bien plus faible, et peut donc l'être avec une précision relative bien plus grande.

> *Remarquons que l'expression établie question 7 pourrait laisser penser qu'une mesure de la valeur moyenne $Z_0 - Z_0'$ donnerait également accès à la masse déposée Δm. C'est vrai sur le papier, mais cet écart est tellement faible qu'il en pratique impossible à mesurer précisémment. D'ailleurs, il ne se voit pas du tout sur la courbe de l'énoncé, alors qu'il est pris en compte dans le calcul.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

C - Décollement du dépôt

12 Raisonnons sur le dépôt de protéines de masse Δm, soumis à son poids et à la force $\vec{N} = N\vec{e}_z$ exercée par le levier. Tant qu'il est posé sur le levier, sa position est z_2. Ainsi,

$$\Delta m\, \ddot{z}_2 = -\Delta m\, g + N$$

L'expression de z_2 étant connue,

$$\ddot{z}_2 = -\omega_0'^2 A \sin(\omega_0' t)$$

d'où on déduit

$$\boxed{N = \Delta m \left(g - \omega_0'^2 A \sin(\omega_0' t) \right) .}$$

13 Le décollage se traduit par une annulation de la réaction normale, l'absence de décollage se traduit donc par une absence d'annulation. Sachant que $-1 \leq \sin(\omega_0' t) \leq 1$, cela se traduit par

$$\forall t,\ N(t) > 0 \qquad \text{d'où} \qquad \omega_0'^2 A < g \qquad \text{soit} \qquad A < \frac{g}{\omega_0'^2} = \frac{(m + \Delta m) g}{2k}$$

La condition devant être vérifiée quelle que soit la masse Δm de protéine déposée, aussi faible soit-elle, on en déduit que l'amplitude doit être limitée à

$$\boxed{A < \frac{mg}{2k} = 4{,}9 \cdot 10^{-10}\ \text{m} .}$$

> *On trouve ici l'ordre de grandeur de la taille d'un atome ! On peut donc se poser la question de la pertinence du modèle utilisé ... En pratique, la protéine se lie au micro-levier par l'intermédiaire de forces attractives qui la maintiennent accrochée. Le raisonnement mené ici dans le cas le plus défavorable est donc intéressant pédagogiquement, mais le résultat absolument pas pertinent dans ce contexte.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr