Oscillateur harmonique

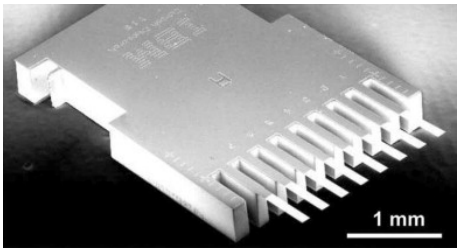
Travailler avec vos cours et TD ouverts est ***chaudement recommandé*** *: un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin,* ***n'hésitez pas à me poser des questions*** *lors des séances de soutien ou à la fin d'un cours.*

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 6
	Ceinture jaune	Questions 1 à 8
	Ceinture rouge	Questions 1 à 11
	Ceinture noire	Questions 1 à 13

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Mesure de masse par micro-levier oscillant

Les micro-leviers oscillants sont de minuscules poutres mécaniques vibrantes (dimensions typiques $200 \times 30 \times 2\,\mu\text{m}$, voir figure 1), utilisées comme capteurs dans de nombreux domaines. Ils permettent par exemple de mesurer des masses extrêmement faibles qui seraient inaccessibles aux balances classiques fonctionnant par gravité. Ces dispositifs trouvent par exemple des applications en analyse biochimique, pour détecter des protéines ou des agents pathogènes. Le principe consiste à fonctionnaliser la surface du micro-levier avec des anticorps capables de reconnaître une protéine particulière. Lorsqu'il est plongé dans un échantillon contenant cette protéine, celle-ci se fixe aux anticorps. La masse du micro-levier augmente, ce qui modifie sa fréquence propre, que l'on peut mesurer de manière relativement aisée par des méthodes optiques.



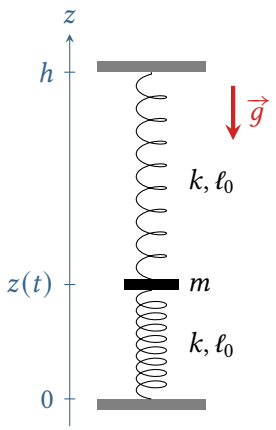


Figure 1 – Microlevier oscillant. Le dispositif photographié compte huit micro-leviers, ce qui permet de tester plusieurs molécules simultanément et/ou de réaliser des mesures différentielles, comme discuté partie B.

Les vibrations du micro-levier sont modélisées par les oscillations verticales d'une masse $m = 1 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}$ maintenue par deux ressorts identiques, de raideur $k = 0{,}1\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0, dont les points d'attache sont distants d'une hauteur h. Tous les frottements sont négligés.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

A - Étude des oscillations

1 - Déterminer la position d'équilibre Z_0 du système.

2 - Établir l'équation du mouvement. L'écrire sous forme canonique, en faisant notamment apparaître la position d'équilibre.

3 - En déduire la fréquence f_0 des oscillations et la calculer numériquement.

4 - La masse m est lancée à l'instant $t = 0$ depuis sa position d'équilibre avec une vitesse v_0. Résoudre l'équation différentielle.

5 - Tracer la courbe représentant la position z du système au cours du temps pour une masse m. On fera figurer Z_0, v_0 et $T_0 = 1/f_0$.

6 - Sur la même figure mais d'une autre couleur, tracer la courbe correspondant aux oscillations d'une masse $m' > m$ lancée de la même façon. J'attends une comparaison justifiée de tous les paramètres : amplitude, période, valeur moyenne, pente de la tangente à l'origine ... et il faut que les écarts ou égalités se voient sur la courbe !

B - Mesure de masse déposée

On considère qu'une couche de protéines, de masse Δm à déterminer, s'est déposée à la surface du micro-levier. La position d'équilibre Z_0' et la fréquence de vibration f_0' du micro-levier sont donc modifiées.

Pour déterminer avec précision l'écart de fréquence $\Delta f = f_0 - f_0'$, on procède par mesure différentielle : on acquiert simultanément la position de deux micro-leviers identiques, l'un ayant été traité pour fixer les protéines et l'autre non, et on calcule la différence $\Delta z = z_1 - z_2$ entre leurs positions. Pour simplifier les calculs, on suppose que les deux micro-leviers oscillent avec la même amplitude et sont en phase à l'instant initial :

$$z_1(t) = Z_0 + A\sin(\omega_0 t) \qquad \text{et} \qquad z_2(t) = Z_0' + A\sin(\omega_0' t)\,.$$

7 - Établir l'expression de $\Delta z(t)$, en utilisant la formule trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\,.$$

8 - La courbe d'évolution de $\Delta z(t)$ est représentée figure 2, et présente des oscillations rapides au sein d'une enveloppe oscillant plus lentement. Expliquer cette allure à partir de l'expression précédente, en identifiant explicitement le terme responsable des oscillations rapides et celui responsable des oscillations lentes. Exprimer le terme d'enveloppe $A(t)$, qui représente l'amplitude instantanée des oscillations.

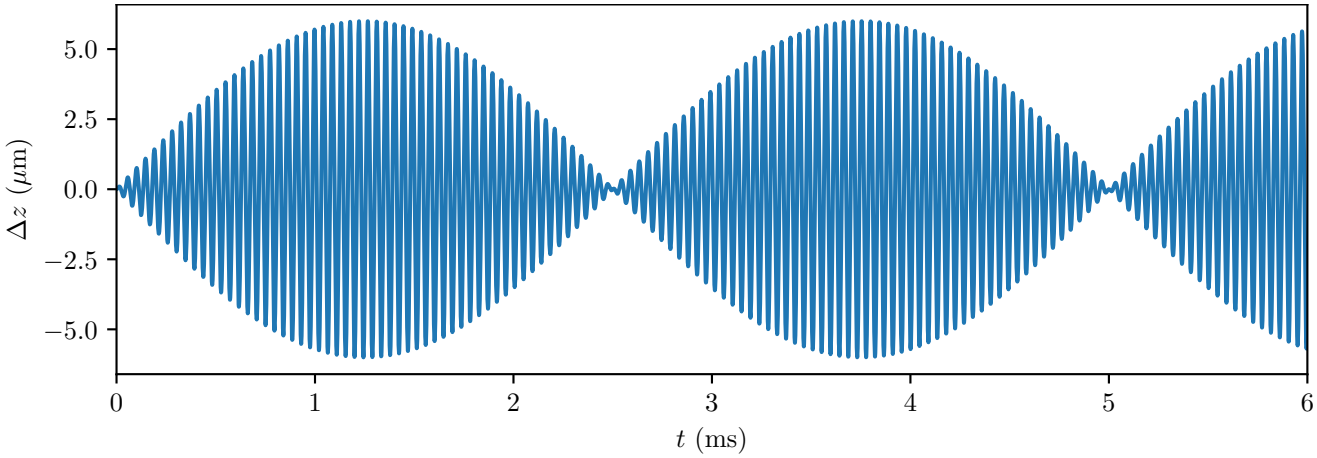


Figure 2 – Écart de position entre les deux micro-leviers.

En pratique, la masse de protéine déposée Δm est très inférieure à la masse m du micro-levier, ce qui permet d'utiliser un développement limité au premier ordre [1] : pour $|x| \ll 1$ et α un réel quelconque,

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x\,.$$

1. Un développement limité au premier ordre revient à approximer la courbe représentative de la fonction par sa tangente. Vous pouvez donc retrouver l'expression donnée en écrivant l'équation de la tangente en 0 à la courbe de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

9 - Montrer que

$$f_0' = f_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2} .$$

10 - Utiliser le développement limité fourni pour établir une expression de Δm en fonction de m, f_0 et $\Delta f = f_0 - f_0'$.

11 - En expliquant le raisonnement, déterminer à partir de la figure 2 une mesure de Δm. Expliquer en quoi une mesure différentielle est plus précise qu'une mesure directe de f_0'.

C - Décollement du dépôt

Pour que les mesures soient fiables, il faut que le dépôt de protéines reste fixé sur le micro-levier lors des oscillations, et en particulier qu'il ne « saute » pas. On cherche un critère sur l'amplitude A des oscillations en se plaçant dans le cas le plus défavorable où aucune force attractive ne lie les protéines au micro-levier. Ainsi, la seule force exercée par le micro-levier sur le dépôt de protéines est une force de réaction normale $\vec{N}$. Tant que le dépôt de protéines se trouve sur le micro-levier, les calculs précédents restent valables et sa position est $z_2(t)$.

12 - Déterminer $N = ||\vec{N}||$ en fonction du temps.

13 - En déduire une condition sur l'amplitude de vibration A pour que le dépôt de protéine ne décolle jamais du micro-levier. La valeur limite sera exprimée en fonction de m, g et k uniquement. Selon la façon dont vous abordez la question, vous pourrez être amenés à utiliser de nouveau un développement limité.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr