Correction

Oscillateurs amortis

Circuit d'ordre 3

Toutes les notations sont indiquées figure 1.

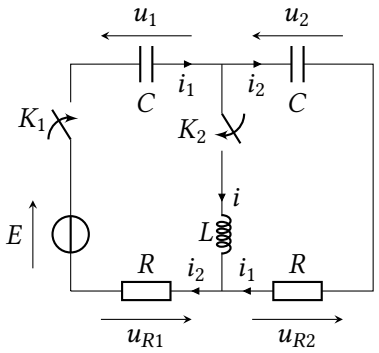


Figure 1 – Schéma annoté du montage.

1 Les deux condensateurs sont traversés par le même courant,

$$i_1 = i_2 \qquad \text{soit} \qquad C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1 - u_2) = 0\,.$$

On en déduit que la différence $u_1 - u_2$ est constante, égale à une valeur fixée par les conditions initiales. Les deux condensateurs étant initialement déchargés,

$$u_1 - u_2 = 0 - 0 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_1 = u_2\,.}$$

2 En régime permanent, les deux condensateurs équivalent à des interrupteurs ouverts et aucun courant ne parcourt le circuit. D'après la loi des mailles et la question précédente,

$$E = u_1 + u_2 + R\cancel{i_1} + R\cancel{i_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_1 = u_2 = \frac{E}{2}\,.}$$

3 Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,

$$\boxed{u_1(0^+) = u_2(0^+) = \frac{E}{2}\,.}$$

Par continuité du courant dans une bobine, sachant que K_2 est ouvert pour $t < 0$,

$$\boxed{i(0^+) = 0\,.}$$

4 D'après la loi des mailles appliquée dans les deux petites mailles,

$$E = u_1 + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri_1 \qquad \text{et} \qquad u_2 + Ri_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Or d'après la loi des nœuds et la loi de comportement des condensateurs,

$$i_1 = i + i_2 \qquad \text{d'où} \qquad i = i_1 - i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\,.$$

En remplaçant dans les deux lois des mailles,

$$E = u_1 + LC\left(\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}\right) + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad u_2 + RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = LC\left(\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}\right)\,.$$

On trouve bien les équations souhaitées, que l'on peut légèrement réorganiser,

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1 = E \qquad \text{et} \qquad LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} - LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = 0\,.}$$

5 Sommer les deux équations précédentes simplifie les dérivées secondes et donne

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1+u_2) + (u_1+u_2) = E \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.}$$

Soustraire ces deux équations conduit à

$$2LC\left(\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}\right) + RC\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right) + u_1 - u_2 = E$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{R}{2L}}_{\omega_0/Q}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{2LC}}_{\omega_0^2}v = \underbrace{\frac{1}{2LC}}_{\omega_0^2}E$$

On identifie ainsi

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{2L} \qquad \text{soit} \qquad Q = \frac{2L}{R}\omega_0 = \frac{2L}{R\sqrt{2LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2L}{C}}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2v = {\omega_0}^2E \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases}\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{2L}{C}}\end{cases}}$$

6 • **Forme générale des solutions :** E est une solution particulière de l'équation, d'où

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$$

• **Recherche de la condition initiale :** tout le travail est déjà fait,

$$u(0^+) = u_1(0^+) + u_2(0^+) = E$$

• **Détermination de la constante :**

$$u(0^+) \underset{\text{CI}}{\uparrow} E \underset{\text{expr}}{\uparrow} A + E \qquad \text{d'où} \qquad A = 0$$

• **Conclusion :** de manière un peu inattendue, la tension u n'évolue pas,

$$\boxed{u = E\,.}$$

7 On trouve

$$Q = \frac{1}{2\cdot 10^2}\sqrt{\frac{10\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2\cdot 10^2}\sqrt{1\cdot 10^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Le régime est donc **apériodique critique**.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Forme générale des solutions :**
  - *Solution particulière :* il est clair que $v_P = E$ convient.
  - *Solution homogène :* le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 + 2\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad (r+\omega_0)^2 = 0\,.$$

  Il admet donc une racine double $r = -\omega_0$, d'où

$$v_H(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\,.$$

  - *Solution complète :* $v(t) = E + (At + B)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

- **Recherche des conditions initiales :**
  - *Sur la fonction :* tout le travail a déjà été fait,

$$v(0^+) = u_1(0^+) - u_2(0^+) = 0\,.$$

  - *Sur la dérivée :* nous avons montré à la question 4 que

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0\,.$$

- **Détermination des constantes :** d'une part,

$$v(0^+) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} E + B \qquad \text{d'où} \qquad B = -E\,.$$

D'autre part, la dérivée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} - \omega_0(At + B)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} A - \omega_0 B \qquad \text{d'où} \qquad A = \omega_0 B = -\omega_0 E\,.$$

- **Conclusion :**

$$v(t) = E + (-\omega_0 E t - E)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v(t) = E\left[1 - (1+\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right]\,.}$$

8 En renversant les combinaisons linéaires,

$$\boxed{u_1 = \frac{u+v}{2} = \frac{E}{2}\left[2 - (1+\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right] \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{u-v}{2} = \frac{E}{2}\,(1+\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\,.}$$

On peut alors calculer les dérivées pour un tracé un peu plus précis,

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{2}\left[-\omega_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + (1+\omega_0 t)\omega_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right] = \frac{E}{2}{\omega_0}^2 t\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \geq 0$$
$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{2}\left[\omega_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} - (1+\omega_0 t)\omega_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right] = -\frac{E}{2}{\omega_0}^2 t\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \leq 0$$

En en déduit que u_1 est monotone croissante, u_2 monotone décroissante, et que les deux tensions ont une tangente à l'origine horizontale. On en déduit les allures de la figure 2.

9 La puissance délivrée par le générateur s'écrit

$$\mathcal{P}_\mathrm{g} = Ei_1 = CE\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{d'où} \qquad W_\mathrm{g} = CE\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = CE\,[u_1]_0^\infty \qquad \text{soit} \qquad \boxed{W_\mathrm{g} = \frac{1}{2}CE^2\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

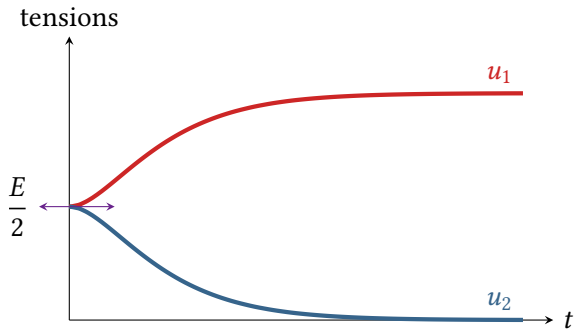


Figure 2 – Allure des tensions u_1 et u_2.

La variation d'énergie stockée par les condensateurs vaut d'une part

$$\Delta\mathcal{E}_{C1} = \frac{1}{2}C\left(u_1(\infty)^2 - u_1(0)^2\right) = \frac{1}{2}C\left(E^2 - \frac{E^2}{4}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta\mathcal{E}_{C1} = \frac{3}{8}CE^2}$$

et d'autre part

$$\Delta\mathcal{E}_{C2} = \frac{1}{2}C\left(u_2(\infty)^2 - u_2(0)^2\right) = \frac{1}{2}C\left(0^2 - \frac{E^2}{4}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta\mathcal{E}_{C2} = -\frac{1}{8}CE^2\,.}$$

Le courant qui traverse la bobine est nul aussi bien à $t = 0$ que pour $t \to \infty$, donc

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}L\left(i_L(\infty)^2 - i_L(0)^2\right) = 0\,.}$$

En notant W_J le travail électrique dissipé par effet Joule, la conservation de l'énergie impose

$$W_\text{g} = \Delta\mathcal{E}_{C1} + \Delta\mathcal{E}_{C2} + \Delta\mathcal{E}_L + W_\text{J} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}CE^2 = \frac{3}{8}CE^2 - \frac{1}{8}CE^2 + W_\text{J}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{W_\text{J} = \frac{1}{4}CE^2\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr