BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Fiche outil

Incertitudes

Plan du cours

Au programme

Extrait des programmes officiels de PTSI et PT : partie « Formation expérimentale », bloc 1 « Mesures et incertitudes ».

L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation.

Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitude-type composée.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire le résultat d'une mesure avec un nombre adapté de chiffres significatifs.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat prévu par une modélisation.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel de PTSI : annexe 3 « Outils numériques », bloc 5 « Probabilités et statistiques ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et **numpy**, leurs spécifications étant fournies, pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque **matplotlib.pyplot**, sa spécification étant fournie, pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Une expérience de physique est un processus complexe, qui entremêle de nombreux phénomènes, dont beaucoup échappent au contrôle de l'expérimentateur. Par conséquent, même en s'appliquant du mieux possible, réaliser une même expérience dans les mêmes conditions conduira presque toujours à des résultats différents : on parle de **variabilité** des résultats de l'expérience. La première cause de variabilité est bien souvent l'expérimentateur lui-même, qui ne peut reproduire les mêmes gestes rigoureusement à l'identique. D'autres causes importantes sont l'environnement et les instruments de mesure. Par exemple, la température impacte de très nombreuses grandeurs physiques, et tout appareil de mesure électronique est sensible au bruit électronique.

L'**incertitude** est un nombre qui quantifie la variabilité des résultats obtenus lors de différentes réalisations d'une même expérience dans les mêmes conditions.

Attention ! Ne pas confondre incertitude et erreur dans la réalisation dans le protocole : ce n'est pas parce que les résultats varient d'une réalisation à l'autre que certaines mesures sont correctes et d'autres fausses. Ainsi, sauf si vous avez de bonnes raisons de croire que vous vous êtes trompé dans la réalisation de l'expérience, il n'y a aucune raison d'éliminer une mesure « parce que sa valeur est différente, donc fausse ».

I - Estimer l'incertitude sur une grandeur qui fluctue

La situation la plus simple à analyser est celle où la variabilité est directement visible sur les résultats expérimentaux. On parle alors d'une **incertitude de type A**.

I.A - Représentation graphique par un histogramme

Imaginons que l'on cherche à mesurer une grandeur X, pour laquelle chaque binôme de la classe réalise un grand nombre de mesures. Supposons que toutes ces mesures soient stockées dans un unique tableau `numpy` nommé `mesures`. L'histogramme des résultats est représenté figure 1 (après quelques étapes de « décoration »).

Avvec Python, l'histogramme des résultats se trace par la fonction `plt.hist(mesures)`.

L'argument optionnel `range` permet d'imposer l'intervalle sur lequel l'histogramme est tracé, et l'argument optionnel `bins` permet de choisir le nombre de sous-intervalles utilisés. Par exemple, la figure 1 s'obtient avec la ligne de code `plt.hist(mesures, range=(48,52), bins=10)`.

Rappel : principe de construction d'un histogramme

Notons x_{min} et x_{max} les valeurs extrêmes obtenues. L'histogramme de la série de mesure s'obtient en divisant l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$ en un certain nombres de sous-intervalles (par défaut 10 pour la fonction `plt.hist`) et en comptant le nombre d'occurences dans chaque sous-intervalle, c'est-à-dire le nombre de résultats de mesure appartenant à ce sous-intervalle.

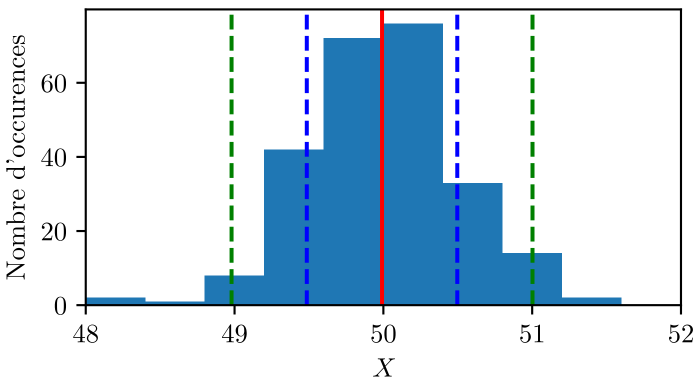


Figure 1 – Histogramme des résultats expérimentaux issus de 250 mesures. La hauteur de chaque rectangle indique le nombre de résultats dont la valeur est comprise entre les deux extrémités de la base. En vue des discussions suivantes, le trait continu rouge indique la valeur moyenne, les traits pointillés sont séparés d'un écart-type.

I.B - Définition quantitative de l'incertitude

- **Incertitude-type**

Notons x_n $(1 \leq n \leq N)$ chaque résultat obtenu lors des N réalisations de l'expérience.

L'**incertitude-type**, notée $u(x)$, quantifie la variabilité des résultats obtenus par leur écart-type.

$$u(x) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2} \qquad \text{avec } \bar{x} \text{ la valeur moyenne des } x_n\,.$$

Avec Python, la moyenne et l'écart type s'obtiennent par `np.mean(mesures)` et `np.std(mesures, ddof=1)`.

Remarque : conventions de définition de l'écart type :

Il existe plusieurs conventions de définition pour l'écart-type. En mathématiques, l'écart-type est généralement défini avec une division par N plutôt que par $N-1$. En physique, l'interprétation comme une incertitude exige de diviser par $N-1$: si on ne réalisait qu'une seule mesure ($N=1$), diviser par N conduirait à une incertitude-type $u(x) = 0$ ... alors que le résultat n'est absolument pas certain ! Au contraire, diviser par $N-1$ donne une incertitude-type non définie (0 divisé par 0), ce qui est conforme au sens physique. L'argument optionnel `ddof=1` de la fonction `np.std` indique cette division par $N-1$.

- **Complément hors programme : incertitude élargie**

Même si l'incertitude-type est une définition robuste, on apprécie parfois d'interpréter l'incertitude comme l'intervalle dans lequel il est « presque sûr » que se trouve la grandeur X cherchée. Or on peut constater sur la figure 1 que de nombreuses valeurs se trouvent hors de l'intervalle $[\bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x)]$. Dans la limite d'un nombre infini de mesures, et en supposant qu'elles suivent une loi de probabilité gaussienne (aussi appelée *loi normale*), on peut montrer que seuls 68 % des valeurs se trouvent dans cet intervalle, comme schématisé figure 2. On utilise donc parfois une autre convention de définition de l'incertitude, donnant un intervalle plus large.

L'**incertitude élargie**, généralement notée Δx, consiste à quantitifier la variabilité des résultats par le double de l'écart type des résultats obtenus.

$$\Delta x = 2\sigma = 2u(x)$$

Avec cette convention de définition, 95 % des valeurs mesurées se trouveraient dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$ si le nombre de mesures réalisées était infini, et que celles-ci vérifiaient une loi de probabilité gaussienne.

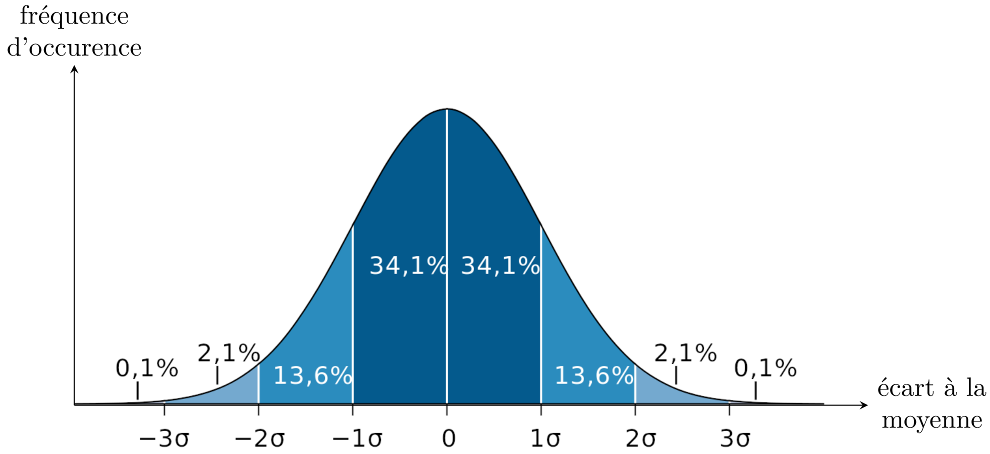


Figure 2 – Loi de probabilité gaussienne. Figure extraite de Wikipédia.

- **Incertitude absolue et incertitude relative**

Les incertitudes-type $u(x)$ ou élargie Δx, homogène à la grandeur, sont appelées **incertitudes absolues**, mais on préfère parfois travailler avec des **incertitudes relatives** $u(x)/x$ ou $\Delta x/x$, qui s'expriment sous forme d'un pourcentage.

I.C - Incertitude-type sur la moyenne

L'incertitude-type définie précédemment quantifie la variabilité des résultats de mesure réalisés *les uns après les autres*, ou autrement dit l'incertitude-type quantifie la variabilité du résultat *d'une mesure unique*. Intuitivement, réaliser une moyenne permet d'améliorer la précision sur la valeur cherchée, il est donc logique que l'incertitude-type $u(\bar{x})$ sur la moyenne ne soit pas égale à l'incertitude-type $u(x)$ sur une mesure unique.

Pour estimer expérimentalement $u(\bar{x})$, il faudrait donc réaliser K séries contenant chacune N mesures, puis calculer l'écart-type des valeurs moyennes $\bar{x}_k$ réalisées sur les N valeurs de chaque série k : autant dire que c'est infaisable en pratique ! Heureusement, il existe un résultat théorique général.

L'incertitude sur la valeur moyenne est reliée à l'incertitude sur une mesure unique par

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

avec N le nombre de mesures utilisées pour calculer $\bar{x}$.

En pratique, on reproduira donc plusieurs fois l'expérience pour estimer $\bar{x}$ et $u(x)$ et on en déduira $u(\bar{x})$ par application du résultat ci-dessus.

> ***Remarque :*** *Le résultat est identique en termes d'incertitude élargie, puisqu'il n'y a qu'un facteur 2 dans la définition.*

Mise en évidence par simulation numérique : *Dans un tableur, on simule 1600 tirages aléatoires d'un nombre compris entre 10 et 11 en regroupant les résultats en $K = 100$ séries de $N = 16$ tirages. Pour chaque série n° k, on calcule la moyenne $\bar{x}_k$, toujours de l'ordre de 10,5, et l'écart-type σ_k, toujours légèrement inférieur à 0,3. On calcule ensuite l'écart-type $\sigma_{\bar{x}}$ des moyennes de chaque série. On trouve alors*

$$\sigma_{\bar{x}} = 0{,}086 \simeq \frac{\sigma_k}{\sqrt{16}} = 0{,}080\,.$$

Un extrait du tableau de valeurs est reproduit ci-dessous.

																Un écart-type / √16	0,079
																Ecart-type des moyennes	0,086
Obs1	**Obs2**	**Obs3**	**Obs4**	**Obs5**	**Obs6**	**Obs7**	**Obs8**	**Obs9**	**Obs10**	**Obs11**	**Obs12**	**Obs13**	**Obs14**	**Obs15**	**Obs16**	**Moyennes**	**Ecarts-type**
10,0027	10,1185	10,7989	10,5231	10,9688	10,2097	10,5675	10,1653	10,5872	10,2352	10,7059	10,8734	10,5752	10,2107	10,9682	10,3209	10,49	0,32
10,0961	10,0569	10,4920	10,5997	10,4648	10,7397	10,6105	10,8930	10,2131	10,2152	10,9519	10,8757	10,9359	10,2829	10,2154	10,2653	10,49	0,31
10,0881	10,6920	10,2164	10,6095	10,7529	10,0757	10,2310	10,4029	10,5279	10,1935	10,3837	10,5992	10,0502	10,3493	10,9404	10,5173	10,41	0,26
10,2864	10,8068	10,6952	10,1645	10,0418	10,6302	10,6156	10,0339	10,4394	10,4381	10,2867	10,0061	10,0913	10,1485	10,3382	10,2650	10,33	0,25
10,4251	10,9439	10,7224	10,5787	10,4965	10,4110	10,6963	10,3316	10,3238	10,8872	10,1623	10,7685	10,8194	10,6594	10,8269	10,8918	10,62	0,24
10,3941	10,4493	10,4200	10,4058	10,4906	10,5528	10,1657	10,7038	10,2411	10,1759	10,1924	10,1527	10,4611	10,6394	10,8611	10,5779	10,43	0,21
10,8660	10,3878	10,2687	10,3673	10,5625	10,5620	10,9149	10,1760	10,2190	10,9858	10,9629	10,2228	10,9026	10,2275	10,7460	10,4710	10,55	0,30
10,1997	10,7978	10,6968	10,6046	10,0700	10,9306	10,0793	10,0051	10,3120	10,6178	10,6572	10,4603	10,6998	10,6399	10,1813	10,8671	10,49	0,30
10,6370	10,6335	10,7518	10,8180	10,5473	10,5688	10,3491	10,4207	10,9282	10,0241	10,4982	10,5780	10,4550	10,5984	10,1408	10,5878	10,53	0,23
10,5320	10,2551	10,1136	10,1525	10,8801	10,6424	10,5482	10,7406	10,6752	10,3029	10,4432	10,6733	10,2604	10,7265	10,4173	10,4064	10,49	0,23
10,1384	10,1711	10,3017	10,4762	10,0248	10,0470	10,7849	10,9719	10,4035	10,0394	10,3392	10,6824	10,5312	10,1616	10,2527	10,1007	10,34	0,28
10,4859	10,8192	10,9201	10,7585	10,4895	10,0707	10,1645	10,1911	10,5544	10,0685	10,4233	10,8421	10,8398	10,5735	10,4054	10,3795	10,50	0,28
10,6101	10,4943	10,3173	10,8681	10,6292	10,1843	10,5563	10,5126	10,5789	10,9058	10,6421	10,1797	10,1420	10,6744	10,3835	10,3482	10,50	0,23
10,3307	10,2576	10,8359	10,0326	10,7470	10,9178	10,5095	10,6589	10,9566	10,4469	10,6048	10,4293	10,5241	10,1884	10,0558	10,1119	10,48	0,30
10,8527	10,2521	10,0705	10,2367	10,0223	10,3440	10,8352	10,4688	10,2413	10,3701	10,0132	10,5166	10,9078	10,0086	10,1766	10,0791	10,34	0,30
10,6427	10,4169	10,8027	10,1491	10,9657	10,7381	10,2579	10,7440	10,9003	10,7294	10,9430	10,9492	10,3993	10,8099	10,3738	10,1249	10,62	0,29
10,6221	10,0888	10,4777	10,4496	10,2789	10,9730	10,6902	10,4846	10,3676	10,7190	10,8960	10,8846	10,5265	10,2215	10,3586	10,2162	10,52	0,26
10,3867	10,7864	10,7478	10,2796	10,3886	10,9744	10,9689	10,5098	10,1525	10,7053	10,7639	10,8794	10,0816	10,1801	10,6487	10,0030	10,53	0,32

Application 1 : Mesure du volume d'un bécher

Un expérimentateur (qui s'ennuie probablement beaucoup) cherche à mesurer le volume d'un bécher étiqueté 100 mL. Pour cela, il le remplit d'eau et pèse sur une balance préalablement tarée, en reproduisant dix fois le protocole à l'identique. Tenant compte de la masse volumique de l'eau, ses résultats donnent une moyenne de 98,7 mL et un écart-type de 3,2 mL.

Donnée : $\sqrt{10} \simeq 3{,}2$.

1 - Que peut-il conclure de ces mesures ?

2 - Il reproduit la mesure une onzième fois. Quelle est l'incertitude-type sur ce onzième résultat ?

$\boxed{1}$ *À partir de ses mesures, l'expérimentateur peut conclure à partir de la moyenne :*

$$V = \bar{V} = 98{,}7\,\mathrm{mL} \qquad \textit{et} \qquad u(V) = u(\bar{V}) = \frac{3{,}2}{\sqrt{10}} = 1{,}0\,\mathrm{mL}\,.$$

$\boxed{2}$ *Puisqu'il s'agit d'une nouvelle mesure unique (et non pas d'une nouvelle série de 10 mesures), l'incertitude-type est donnée simplement par l'écart-type des dix précédentes, sans division par $\sqrt{10}$, soit*

$$u(V_{11}) = 3{,}2\,\mathrm{mL}\,.$$

I.D - Présentation du résultat

Le résultat final d'une expérience doit nécessairement présenter la valeur moyenne $\bar{x}$ et l'incertitude sur cette valeur, mais deux conventions se rencontrent en pratique.

L'écriture la plus courante d'un résultat se fait avec l'incertitude élargie :

$$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} \quad \text{avec l'unité !}$$

où $\Delta\bar{x}$ est donné avec **un seul** chiffre significatif,
et le dernier chiffre significatif donné sur $\bar{x}$ est la décimale sur laquelle porte $\Delta\bar{x}$.

On peut également préférer donner $\bar{x}$ et $u(\bar{x})$,
en choisissant généralement deux chiffres significatifs pour $u(\bar{x})$ et un nombre cohérent sur $\bar{x}$.

En concours ou TIPE, faire les deux ne demande pas beaucoup d'effort et plaira à tous les examinateurs ☺

Un exemple pour comprendre : (en faisant comme si X n'avait pas d'unité)

$$\begin{array}{rl} \bar{x} = & 1\ 7{,}3\,|\,0\ 9\ 6 \\ \Delta\bar{x} = & \quad 0{,}2\,|\,8\ 4\ 6 \end{array} \qquad \text{donne} \qquad X = 17{,}3 \pm 0{,}3 \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{cases} \bar{x} = 17{,}31 \\ u(\bar{x}) = 0{,}14 \end{cases}$$

Ici, l'incertitude porte sur le premier chiffre après la virgule. Le résultat est donc donné avec un chiffre après la virgule (donc ici trois chiffres significatifs), et l'incertitude arrondie pour être donnée avec un chiffre significatif.

Application 2 : Chiffres significatifs

Écrire avec un nombre de chiffres significatifs adéquat les résultats ci-dessous, qu'on imagine issus de mesures expérimentales. On utilisera la notation $\pm$ associée à une incertitude élargie.

1 - Longueur d'onde de la raie verte du mercure : $\lambda = 546{,}1\,\mathrm{nm}$ et $u(\lambda) = 3{,}17\,\mathrm{nm}$.

2 - Temps de chute d'une bille dans un liquide visqueux : $\Delta t = 4{,}73\,\mathrm{s}$ et $u(\Delta t) = 0{,}62\,\mathrm{s}$.

3 - Volume équivalent d'un titrage : $V_\mathrm{E} = 14\,\mathrm{mL}$, $u(V_\mathrm{E}) = 0{,}22\,\mathrm{mL}$.

Ne pas oublier que l'incertitude élargie est le double de l'incertitude-type !

$\boxed{1}$ *L'incertitude porte sur le chiffre des unités, donc* $\lambda = 546 \pm 6\,\mathrm{nm}$.

$\boxed{2}$ *L'incertitude élargie vaut 1,24 s, et porte de nouveau sur le chiffre des unités, donc* $\Delta t = 5 \pm 1\,\mathrm{s}$.

$\boxed{3}$ *L'incertitude porte sur le chiffre des dixièmes, on peut donc supposer qu'un zéro significatif a été oublié sur le résultat. Il faudrait redemander à l'étudiant distrait, mais faute de mieux on peut penser que* $V_\mathrm{E} = 14{,}0 \pm 0{,}4\,\mathrm{mL}$.

II - Estimer l'incertitude sur une grandeur qui ne fluctue pas

Il est des situations pour lesquelles reproduire l'expérience à l'identique ne permet pas d'observer de variabilité dans les résultats, ou bien parce que la grandeur elle-même ne varie pas dans les conditions de l'expérience (p.ex. largeur d'une table) ou bien parce que sa variabilité est inférieure à la résolution de l'instrument de mesure utilisé (p.ex. graduation d'une règle ou d'un rapporteur). Une situation analogue est celle où l'expérience ne peut être réalisée qu'une seule fois. Dans tous les cas, on ne dispose que d'un seul et unique résultat ... mais cela ne veut absolument pas dire qu'il est certain ! On parle dans ce contexte d'**incertitude de type B**.

Il faut alors estimer un intervalle dans lequel on est (raisonnablement) certain que le résultat de la mesure se trouve, noté sous la forme $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, dont x_0 est appelé le centre et ε la **demi-étendue**. La demi-étendue est estimée ou bien « avec bon sens », ou bien en se reportant à la notice de l'instrument de mesure utilisé. En raisonnant comme si les résultats de mesure étaient distribués de manière uniforme dans cet intervalle, on montre les résultats suivants.

Pour un résultat ne fluctuant pas, compris avec « certitude » dans l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on admet

$$X = x_0 \qquad \text{et} \qquad u(X) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

Un exemple pour comprendre :

Imaginons avoir l'idée farfelue de mesurer la longueur d'une carte bancaire avec la règle jaune du tableau.

On constate que la longueur de la carte est comprise avec certitude dans l'intervalle $[8\,\mathrm{cm}; 9\,\mathrm{cm}]$. On en déduit que la longueur est de 8,5 cm, avec une incertitude-type $0{,}5/\sqrt{3} = 0{,}29\,\mathrm{cm}$.

> ***Remarque :*** *J'ai ici considéré le cas le plus simple où la demi-étendue* ε *correspond à la moitié d'une graduation, mais ce n'est pas une règle générale : tout dépend de la situation et de l'appréciation de l'expérimentateur. Par exemple, mesurer avec la même règle jaune la largeur d'une feuille A4 donnerait 21 cm « presque tout pile » : compte tenu de l'observation visuelle de la règle, on peut par exemple prendre comme intervalle* $[20{,}7\,\mathrm{cm}; 21{,}3\,\mathrm{cm}]$.

III - Estimer l'incertitude sur une grandeur calculée

Intéressons-nous maintenant au cas très fréquent où la grandeur d'intérêt n'est pas directement une grandeur mesurée sur laquelle l'incertitude a été estimée mais se calcule à partir de telles grandeurs. Sauf exception, l'incertitude sur le résultat ne se devine pas de façon immédiate en raison du « principe de compensation des erreurs », au moins partiellement.

Attention ! Les résultats de ce paragraphe se limitent au cas où les incertitudes sur les différentes grandeurs sont estimées de manière indépendante les unes des autres.

III.A - Formules de composition des incertitudes

Les formules de composition des incertitudes permettent d'estimer l'incertitude sur une grandeur calculée dans les cas simples. Elles se démontrent par des raisonnements probabilistes : en toute rigueur, elles ne sont valables que dans la limite d'un nombre infini de mesures suivant une loi de probabilité gaussienne. Le tableau ci-dessous donne les formules de composition des incertitudes-type, mais elles sont identiques pour les incertitudes élargies.

Multiplication par une constante	$x = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$u(x) = \lvert\lambda\rvert\, u(y)$
Somme ou différence	$x = y + z$ ou $x = y - z$	$u(x) = \sqrt{u(y)^2 + u(z)^2}$
Produit ou quotient	$x = y \times z$ ou $x = \dfrac{y}{z}$	$\dfrac{u(x)}{x} = \sqrt{\left(\dfrac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{u(z)}{z}\right)^2}$
Puissances et racines	$x = y^p \quad (p \in \mathbb{R})$	$\dfrac{u(x)}{x} = \lvert p\rvert\, \dfrac{u(y)}{y}$

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la dernière ligne y^p ne peut pas se déduire de l'avant-dernière $y \times z$. Pour que ces relations s'appliquent, les deux variables y et z doivent être indépendantes l'une de l'autre ... ce qui n'est évidement pas le cas de y avec lui-même. Ce faisant, il y a une compensation partielle des incertitudes sur y et z : de manière très schématique, si une fluctuation rend y un peu plus grand, il se peut que z soit rendu un peu plus petit, ce qui donne une compensation dans le calcul de x. Un tel effet est bien sûr impossible dans le calcul de y^p.

III.B - Estimation numérique par simulation Monte Carlo

- **Principe**

Considérons que l'on cherche à estimer une grandeur y reliée à un ensemble de grandeurs expérimentales $x_1, x_2, ..., x_K$ par une relation écrite formellement

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_K)\,,$$

avec f une fonction quelconque mais connue. Chaque grandeur expérimentale x_k $(1 \leq k \leq K)$ est caractérisée par sa valeur et son incertitude-type $u(x_k)$. L'incertitude-type $u(y)$ est liée à la variabilité des grandeurs x_k. Pour l'estimer, on recourt à la simulation selon l'algorithme suivant :

▷ Fixer un nombre N de réalisations de l'expérience à simuler.

▷ Pour chaque réalisation, c'est-à-dire pour n allant de 1 à N :
  → tirer aléatoirement une valeur $x_{k,n}$ pour chaque x_k ;
  → pour ces valeurs, calculer y_n.

▷ Calculer la moyenne $\bar{y}$ et l'écart-type σ de l'ensemble des valeurs y_n $(1 \leq n \leq N)$, et conclure par un traitement statistique (cf. paragraphe I)

$$Y = \bar{y} \qquad \text{et} \qquad u(Y) = u(\bar{y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\,.$$

> ***Remarque :*** *Ces méthodes par tirage aléatoire étaient (sont ?) utilisées par les joueurs de casino pour estimer leurs gains potentiels, d'où leur nom générique de « méthodes de Monte Carlo ».*

En fonction de la manière dont l'incertitude-type $u(x_k)$ a été estimée, on choisira d'utiliser pour les tirages aléatoires une loi de probabilité gaussienne (la valeur centrale est plus probable que les autres) ou une loi de probabilité uniforme (toutes les valeurs de l'intervalle sont équiprobables). On utilisera les fonctions Python suivantes :

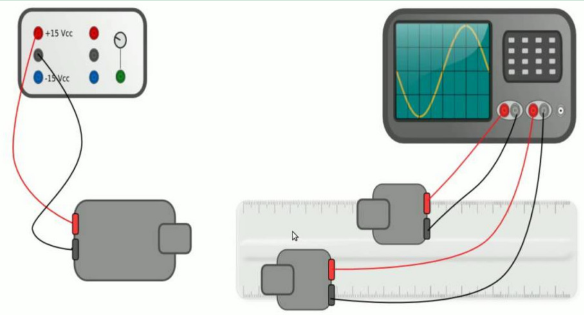
▷ pour le tirage d'un nombre aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme dans un intervalle [`mini`, `maxi`] : `np.random.uniform(mini,maxi)` ;

▷ pour le tirage d'un nombre aléatoire suivant une loi de probabilité gaussienne (aussi appelée loi normale) de moyenne `moy` et d'écart-type `sigma` : `np.random.normal(moy,sigma)`.

- **Un exemple : mesure de la célérité du son dans l'air**

> ***Remarque préalable :*** *Cet exemple pourrait être traité avec les formules de composition des incertitudes, mais il a le mérite d'être simple pour une première simulation Monte Carlo.*

Application 3 : Estimation d'incertitude par simulation



Un émetteur émet en continu des ultrasons à la fréquence $f = 44{,}1$ kHz, reçus par deux récepteurs séparés d'une distance d. Lorsque la distance d est un multiple de la longueur d'onde λ, alors les signaux reçus par les deux récepteurs observés sur l'oscilloscope sont en phase. Partant des deux récepteurs côte à côte, on en recule un jusqu'à compter dix passages en phase : ils sont alors séparés de $d = 10\,\lambda$. D'après la relation de dispersion,

$$c = \lambda\, f = \frac{d\, f}{10}\,.$$

En reproduisant dix fois l'expérience, on mesure successivement

d (cm)	7,6	7,8	8,0	7,7	7,8	7,7	7,6	7,8	7,8	7,7

La notice de l'émetteur d'ultrasons indique (ou laisse penser, car elle ne dit rien de spécial ...) que la fréquence est comprise avec certitude dans l'intervalle $[44{,}0\,\text{kHz}, 44{,}2\,\text{kHz}]$.

Écrire un code Python permettant d'estimer la célérité c et son incertitude par simulation Monte Carlo.

Compte tenu de la méthode de mesure, la distance d sera tirée aléatoirement suivant une loi gaussienne. Au contraire, la fréquence f sera tirée aléatoirement suivant une loi uniforme.

Première proposition de code : *facile à comprendre, mais pas très économe en syntaxe.*

```
1  ### Valeurs expérimentales :
2  d_exp = np.array([7.6,7.8,8.0,7.7,7.8,7.7,7.6,7.8,7.8,7.7])*1e-2
3  d_moy = np.mean(d_exp)
4  u_d = np.std(d_exp,ddof=1)

6  f_min = 44.0e3
7  f_max = 44.2e3

9  N = 1000 # nbre d'expériences simulées
10 c = []   # liste vide pour stocker les résultats

12 for n in range(N):
13     ### Simulation d'UNE expérience :
14     d = np.random.normal(d_moy,u_d)
15     f = np.random.uniform(f_min,f_max)
16     c_simu = d*f/10
17     c.append(c_simu) # on garde la valeur pour le trt statistique

19 ### Traitement statistique des résultats simulés
20 c_moy = np.mean(c)
21 u_c = np.std(c, ddof=1)

23 ### Affichage des résultats dans la console :
24 print("c_moy =",c_moy)
25 print("u_c =",u_c)
```

Deuxième proposition de code : *les fonctions de la bibliothèque* `random` *permettent de générer directement des tableaux* `numpy` *contenant plusieurs valeurs. Les lignes 10 à 17 du code précédent peuvent donc être remplacées par les suivantes, qui simulent les N expériences à la fois.*

```
d = np.random.normal(d_moy,u_d,N)  # tabl numpy de N valeurs aléatoires
f = np.random.uniform(f_min,f_max,N)
c = d*f/10       # opération terme à terme car tableaux numpy
```

IV - Comparaison à une valeur attendue

Il est fréquent de devoir comparer une valeur issue de mesures à une valeur attendue, celle-ci pouvant être donnée par un fabricant, prévue par un modèle théorique, ou encore estimée par un autre protocole de mesure.

L'idée est qualitativement simple : pour que la valeur mesurée soit compatible avec la valeur attendue, il ne faut pas qu'elle en soit « trop » éloignée. Comme la dispersion des valeurs expérimentales est quantifiée par l'incertitude-type, l'écart entre les valeurs mesurée et attendue doit être comparée à cette incertitude type.

IV.A - Comparaison entre deux valeurs connues avec incertitude, z-score

Considérons d'abord le cas où les deux valeurs sont connues avec une incertitude-type, ce qui est par exemple le cas si elles sont issues de deux séries de mesures expérimentales d'une même grandeur réalisées selon deux protocoles différents.

On appelle **écart normalisé** ou ***z*-score** entre deux valeurs x_1 et x_2, connues avec une incertitude type $u(x_1)$ et $u(x_2)$,

$$z = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}} \,.$$

Par convention, les deux valeurs x_1 et x_2 sont dites **compatibles** si

$$z \leq 2$$

Interprétation graphique : voir figure 3. Si le z-score est suffisamment faible, les deux histogrammes issus des deux expériences se recouvrent « beaucoup », alors qu'ils ne se recouvrent que « très peu » lorsque le z-score est élevé.

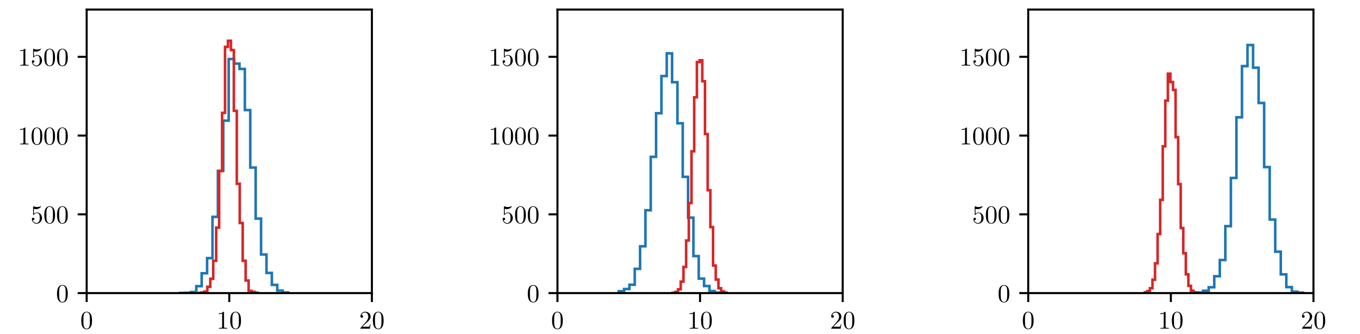


Figure 3 – Critère de compatibilité entre deux valeurs sur lesquelles l'incertitude-type est connue. On simule 10 000 réalisations de deux expériences, représentées sous forme des deux histogrammes. De gauche à droite : $z = 0{,}5$ (les résultats des deux expériences sont considérées compatibles), $z = 2$ (limite de compatibilité) et $z = 5$ (résultats incompatibles). Ce nombre de réalisations est bien sûr innatteignable dans une expérience réelle en CPGE, mais permet de bien visualiser les histogrammes.

Interprétation plus mathématique : Les formules de composition des incertitudes données au paragraphe III.A indiquent que le terme au dénominateur du z-score peut s'écrire

$$\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2} = u(x_1 - x_2)$$

c'est-à-dire qu'il s'interprète comme l'incertitude-type de la grandeur calculée $x_1 - x_2$. Ainsi, le z-score compare la valeur de $x_1 - x_2$ (calculée par exemple par moyennage) à son incertitude-type.

Si les valeurs de x_1 et x_2 sont compatibles, alors $x_1 - x_2$ devrait être nul ... ou en tout cas « pas très grand », l'égalité stricte étant inaccessible à cause de la variabilité intrinsèque aux expériences. Cette variabilité étant quantifiée par l'incertitude-type $u(x_1 - x_2)$, on comprend que le critère de compatibilité repose sur un z-score petit. Le seuil exact de compatibilité $z \leq 2$ est choisi par convention, essentiellement pour des raisons historiques : en pratique, les mesures ne sont pas « beaucoup plus compatibles », c'est-à-dire que les histogrammes ne se chevauchent pas beaucoup plus, si $z = 1{,}9$ que si $z = 2{,}1$.

IV.B - Comparaison entre une valeur expérimentale et une valeur connue sans incertitude

Il est assez fréquent que la valeur attendue soit donnée sans incertitude, en particulier lorsqu'elle est fournie par un fabricant, ou que celle-ci soit négligeable, comme par exemple pour une grandeur tabulée. Dans ce cas, le critère sur le z-score devient

$$z = \frac{|x_\mathrm{a} - x_\mathrm{exp}|}{u(x_\mathrm{exp})} \leq 2$$

ce qui peut se reformuler de façon plus lisible sous la forme ci-dessous :

Par convention, la valeur expérimentale x_exp et la valeur attendue x_a sont dites compatibles si

$$x_\mathrm{a} \in [x_\mathrm{exp} - 2\,u(x_\mathrm{exp});\ x_\mathrm{exp} + 2\,u(x_\mathrm{exp})] \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_\mathrm{a} \in [x_\mathrm{exp} - \Delta x_\mathrm{exp};\ x_\mathrm{exp} + \Delta x_\mathrm{exp}]$$

L'écart entre la valeur attendue et la valeur expérimentale est inférieure à l'incertitude élargie.

Interprétation graphique : voir figure 4. Qualitativement, la valeur attendue est compatible avec les résultats expérimentaux si elle se trouve « à l'intérieur » de l'histogramme des résultats obtenus.

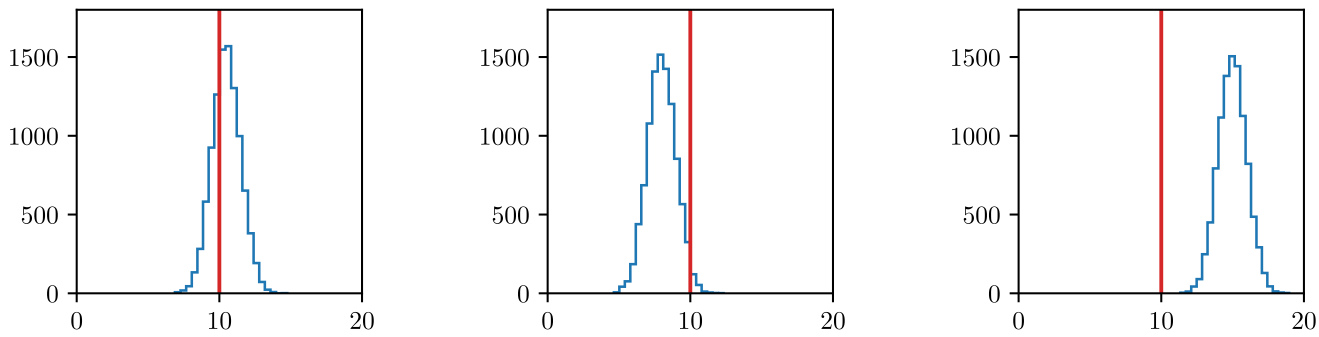


Figure 4 – Critère de compatibilité entre deux valeurs dont l'une est connue exactement. On simule 10 000 réalisations d'une même expérience, représentées sous forme de l'histogramme, à comparer à la valeur attendue représentée par le trait plein. De gauche à droite : $z = 0{,}5$ (valeurs considérées compatibles), $z = 2$ (limite de compatibilité) et $z = 5$ (valeurs incompatibles). Ce nombre de réalisations est bien sûr innatteignable dans une expérience réelle en CPGE, mais permet de bien visualiser les histogrammes.