BLAISE PASCAL
PTSI 2018-2019

Chapitre AM1 – Architecture de la matière

Dualité onde corpuscule et quantification de l'énergie

Au programme

Ce que vous devez savoir et savoir faire

- ▷ Savoir définir la dualité onde-corpuscule pour la lumière et la matière.
- ▷ Connaître et utiliser les relations de Planck-Einstein et de de Bröglie pour évaluer des ordres de grandeur de phénomènes quantiques.
- ▷ À partir de documents, analyser une expérience illustrant la notion d'onde de matière.
- ▷ À partir de documents, interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.

- ▷ Connaître l'interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde.
- ▷ Connaître et utiliser l'inégalité d'Heisenberg pour évaluer des ordres de grandeur de phénomènes quantiques.
- ▷ À partir de documents, comprendre les conséquences d'une inégalité d'Heisenberg dans une expérience nécessitant une description quantique.

- ▷ Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification sur l'exemple de la quantification de l'énergie d'une particule libre confinée à une dimension.

Questions de cours pour les colles

- ▷ Donner l'ordre de grandeur de la constante de Planck.
- ▷ Énoncer les relations de de Bröglie.
- ▷ Énoncer l'inégalité d'Heisenberg relative à la position et donner son interprétation qualitative pour un système quantique (« égalité » d'Heisenberg si le système est quantique).
- ▷ Donner les conséquences du confinement sur une particule quantique (aucune formule ni démonstration n'est à apprendre, seulement la phénoménologie).

Au concours

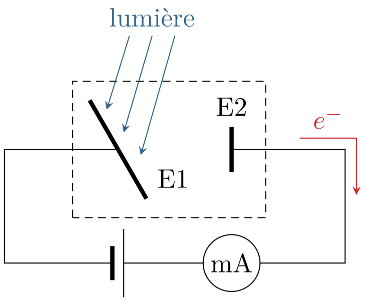
- ▷ Écrit : une question en 2016.
- ▷ Oral : très rarement.

Plan du cours

I - Photons et dualité onde-corpuscule pour la lumière

I.1 - Quantification des échanges d'énergie

- **Expérience : mise en évidence de l'effet photoélectrique (fin du XIXe siècle)**



De la lumière est envoyée sur une électrode E1 placée dans une cellule à vide. Heinrich Hertz a constaté en 1887 que cela est susceptible d'arracher des électrons de l'électrode E1, qui sont alors collectés par l'électrode E2.

Le générateur permet de polariser l'électrode E2 pour y attirer les électrons, qui sont a priori émis par l'électrode K dans une direction quelconque.

- **Observations**

▷ avec une lampe visible : $i = 0$ quelle que soit l'énergie lumineuse incidente, c'est-à-dire qu'aucun électron n'est jamais arraché de l'électrode E1.

▷ avec une lampe UV : $i \neq 0$ augmente quand l'intensité lumineuse augmente, c'est-à-dire des électrons sont toujours arrachés, quelle que soit l'intensité lumineuse.

⇝ il existe une condition sur la longueur d'onde (ou la fréquence du rayonnement) pour que l'effet se manifeste.

- **Modélisation et interprétation**

Modèle de physique classique : L'électron est attiré à l'intérieur du matériau par les noyaux des atomes. L'arracher demande de lui fournir une énergie W, appelé travail d'extraction. Cela permet d'expliquer pourquoi des électrons sont arrachés, mais a priori le courant mesuré ne devrait dépendre que de l'énergie lumineuse et pas du tout de la fréquence du rayonnement.

Modèle proposé par Einstein : Les échanges d'énergie ne se font pas de façon continue. L'énergie ne s'échange que par paquets, appelés quantum d'énergie, chaque paquet portant une énergie proportionnelle à la fréquence du rayonnement.

⇝ les quantums d'énergie échangés entre l'électrode et le rayonnement sont appelés **photons**, chaque photon étant porteur d'une énergie $\varepsilon = h\nu$ où $h = 6{,}67 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ est la **constante de Planck**.

Explication du seuil en fréquence dans le modèle d'Einstein :

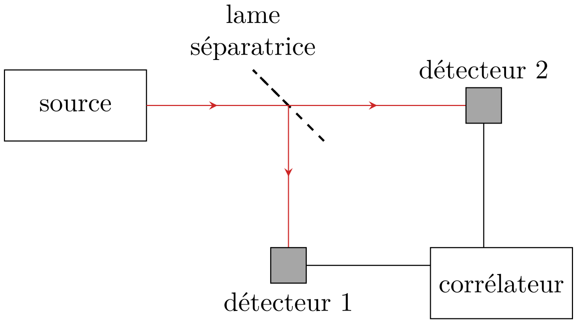
Espace 1

- **Bilan**

▷ Ce qu'on a montré : les échanges d'énergie entre la lumière et la matière sont quantifiés ;
▷ Question ouverte : quelle est la nature exacte des photons ?

I.2 - Comportement corpusculaire de la lumière

- **Expérience de Mandel (1977) : preuve du caractère corpusculaire de la lumière**



Un faisceau lumineux émis par une source est envoyé sur une lame semi-réfléchissante, un composant optique qui divise un faisceau de lumière en deux parties d'intensité égale. La source est très peu lumineuse : si la lumière se compose de photons (ce que l'on veut prouver !), alors il n'y a pas plus d'un photon à la fois dans le dispositif.

Le corrélateur est un dispositif électronique qui permet de mesurer le paramètre de corrélation

$$g^{(2)} = \frac{\langle I_1\, I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \, \langle I_2 \rangle} \,.$$

où I_1 et I_2 sont les intensités mesurées par les détecteurs et les crochets désignent la moyenne sur un temps très long.

- **Modélisation**

▷ Si la lumière a un comportement ondulatoire :

Espace 2

▷ Si la lumière a un comportement corpusculaire :

Espace 3

- **Observation**

Résultat expérimental : $g^{(2)} = 0{,}2 \pm 0{,}3$, incompatible avec le modèle ondulatoire mais compatible avec le modèle corpusculaire.

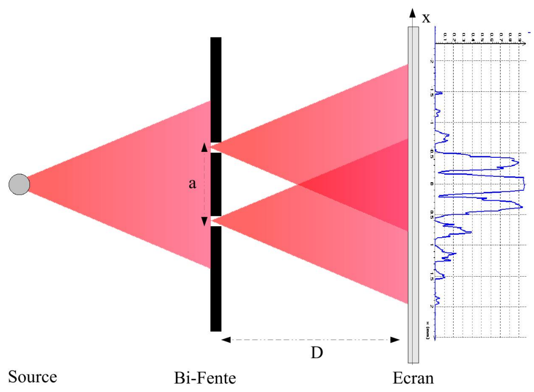
- **Bilan**

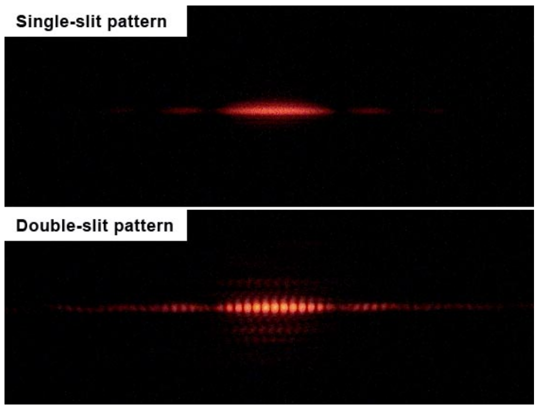
▷ Ce qu'on a montré : la lumière est composée de corpuscules.
▷ Question ouverte : que faut-il faire du modèle ondulatoire ?

I.3 - Dualité onde-corpuscule pour la lumière

- **Expérience : fentes d'Young optiques**

Avec une source lumineuse intense : par exemple un laser.





Lorqu'une seule des deux fentes est ouverte on observe une figure de diffraction sur l'écran, alors que lorsque les deux le sont des franges sombres s'y superposent, ce qui est caractéristique d'interférences.

Avec une source de photons uniques :

Après un temps court :

Espace 4

Après un temps long : environ 200 000 photons atteignent l'écran.

Espace 5

- **Interprétation**

Espace 6

La lumière a donc une double nature : on parle de **dualité onde-corpuscule**.

- **Propriétés d'un photon**

Comme la particule « photon » décrit le même objet physique que l'onde lumineuse, alors leurs propriétés sont reliées.

Un photon

- ▷ se propage à la vitesse de la lumière dans la direction $\overrightarrow{u}$ de propagation de l'onde ;
- ▷ est de masse rigoureusement nulle ;
- ▷ transporte une énergie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ où ν et ω sont la fréquence et la pulsation de l'onde ;
- ▷ a une quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = \dfrac{h}{\lambda}\overrightarrow{u} = \hbar\overrightarrow{k}$.

Ces deux dernières relations sont appelées **relations de Planck-Einstein**, et elles impliquent la **constante de Planck *h*** ou la constante de Planck « réduite » notée $\hbar$,

$$h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \qquad \text{et} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}\,.$$

> ***Remarque :*** *Comme le photon se déplace à la vitesse de la lumière, alors il est relativiste. Le fait que sa masse soit nulle en est une conséquence, et de même sa quantité de mouvement n'est pas donnée par une relation de type «* $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ *».*

I.4 - Du quantique au classique

Compte tenu de la dualité onde-corpuscule, comment expliquer qu'avec un laser on obtienne directement la figure d'interférences prévue par le modèle complètement ondulatoire de la lumière ?

Exercice C1 : Nombre de photons envoyés par un laser

On considère un laser rouge de longueur d'onde $\lambda \sim 600\,\mathrm{nm}$ et de puissance $P = 1\,\mathrm{mW}$. Calculer l'ordre de grandeur du nombre de photons qu'il envoie en $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$, c'est-à-dire moins que la persistance rétinienne.

▷ Énergie totale arrivant sur l'écran :

Espace 7

▷ Énergie d'un photon du faisceau laser :

Espace 8

▷ Nombre de photons contenus dans le faisceau :

Espace 9

Conclusion : il y a beaucoup plus de photons qui arrivent sur l'écran en 10^{-2} s avec le laser que de photons qui arrivent pendant toute la durée de l'expérience montrant le caractère corpusculaire, il est donc logique de ne retrouver que le résultat final, avec les franges.

Les propriétés corpusculaires de la lumière doivent être prises en compte
lorsque les énergies caractéristiques de l'expérience sont de l'ordre ou inférieures à celle d'un photon.
Si elles sont très supérieures, une description ondulatoire est suffisante.

Le terme « de l'ordre de » est à prendre au sens large et peut inclure 1000 voire 10 000 fois supérieur. Par ailleurs, ce critère ne lève pas la difficulté d'identifier correctement les énergies caractéristiques avec lesquelles il faut faire la comparaison !

II - Dualité onde-corpuscule pour la matière

II.1 - Mise en évidence expérimentale

- **Expérience : fentes d'Young électroniques (laboratoires Hitachi, 1989)**

Des électrons, émis par une source identique à celle d'un microscope électronique, sont accélérés puis dirigés vers un ensemble de trois électrodes. Le flux d'électrons émis par la source est contrôlé, de l'ordre de 10^3 électrons par seconde. Une électrode centrale cylindrique, de diamètre inférieur au micromètre, est portée à un potentiel supérieur à celui de deux électrodes planes disposées latéralement, ce qui entraîne une déviation latérale. Les ordres de grandeur mis en jeu sont tels qu'il n'y a qu'un seul électron à la fois dans le dispositif.

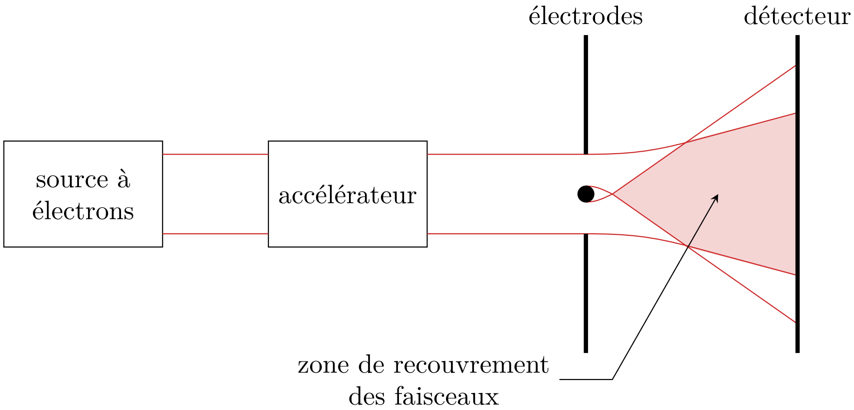


Figure 1 – Schéma de l'expérience.

Observations :

Espace 10

- **Interprétation**

Les résultats sont analogues à ceux de l'expérience des fentes d'Young avec de la lumière de faible intensité. Les conclusions sont donc analogues.

Les électrons possèdent également un comportement de type particule dans leur détection,
mais leur propagation dans le dispositif est régie par des lois ondulatoires.

Les électrons ont également une double nature : on parle à nouveau de **dualité onde-corpuscule**.

Une telle particule quantique est parfois appelée « quanton ».

- **Conséquence inattendue : influence d'un observateur extérieur (complément culturel)**

Espace 11

II.2 - Relations de de Bröglie

Dans un cadre plus large, on parle d'**onde de matière**. Comme pour le photon et l'onde lumineuse, la particule et l'onde de matière décrivent le même objet physique et leurs propriétés sont donc intimement liées. Ces propriétés sont données par les relations de de Bröglie (prononcer « de Breuille »), qui sont le pendant des relations de Planck-Einstein.

Une onde de matière
- ▷ se propage à la vitesse $\vec{v}$ de déplacement de la particule ;
- ▷ a pour vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{\vec{p}}{\hbar}$ où $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement de la particule ;
- ▷ de façon équivalente, a pour longueur d'onde la **longueur d'onde de de Bröglie** $\lambda = \dfrac{h}{p}$;

avec la constante de Planck $h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ et la constante de Planck réduite $\hbar = h/2\pi$.

Les propriétés ondulatoires de la matière doivent être prises en compte lorsque les distances caractéristiques sont inférieures ou de l'ordre de la longueur d'onde de de Bröglie. Si elles sont très supérieures, une description mécanique est suffisante.

II.3 - Fonction d'onde

En mécanique classique : deux particules lancées d'un même point M_0 à l'instant t_0 avec une même vitesse arriveront toujours au même point M_1 au même temps t_1 et on peut suivre leur trajectoire.

En mécanique quantique : ce n'est plus vrai, comme l'atteste l'émergence de figures d'interférence qui implique la nécessité d'une description ondulatoire.

- ⇝ tous les électrons ou tous les photons, même émis exactement de la même façon, peuvent arriver à deux endroits différents avec une certaine probabilité ;
- ⇝ parler de trajectoire d'une particule quantique n'a pas vraiment de sens puisqu'il n'est pas possible de localiser une onde.

En mécanique quantique, la notion de trajectoire $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$
doit être remplacée par celle de **fonction d'onde** $(M,t) \mapsto \psi(M,t)$.
Cette fonction d'onde est telle que $\mathrm{d}P = |\psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}V$ est la probabilité qu'une mesure de la position de la particule à l'instant t indique qu'elle se trouve dans un petit volume $\mathrm{d}V$ centré sur le point M.

> ***Remarque pour l'avenir :*** *Les notations $\mathrm{d}P$ et $\mathrm{d}V$ sont celles de différentielles. Elles désignent des quantités dites élémentaires ou infinitésimales.*

L'existence et la définition de la fonction d'onde constituent un principe (un postulat) de la mécanique quantique, qui décrit le caractère intrinsèquement probabiliste de la détection quantique. En particulier, cette probabilité n'est **pas du tout** reliée à des incertitudes expérimentales.

La fonction d'onde est dimensionnée :

Espace 12

Elle est également normalisée. Comme la particule se trouve forcément quelque part, alors

$$\sum_{\text{espace}} \mathrm{d}P = 1 \qquad \text{soit} \qquad \iiint_{\text{espace}} |\psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}V = 1\,.$$

Étienne Thibierge, 12 décembre 2018, www.etienne-thibierge.fr

Enfin, une particularité de la fonction d'onde est d'être à valeurs complexes. Cela peut paraître surprenant mais ne pose pas de difficulté car c'est son module (donc un nombre réel) qui a une signification expérimentale.

Lorsque l'on raisonne en termes de fonction d'onde, les lois de Newton ne s'appliquent évidemment pas et doivent être remplacées par une autre équation, appelée **équation de Schrödinger**.

II.4 - Inégalité d'Heisenberg

En mécanique classique : la position et la vitesse peuvent être connues avec une précision infinie, en pratique seulement limitée par la précision des instruments de mesure.

En mécanique quantique : la nécessité de prendre en compte le caractère ondulatoire implique une indétermination sur la position et la quantité de mouvement de la particule (une onde ne peut pas être parfaitement localisée), et ce **indépendamment** de toute problématique de précision des mesures.

Espace 13

Cette inégalité est appelée **inégalité d'Heisenberg**.

Δx et Δp_x s'apparentent aux écarts-types de la distribution de probabilité.

> ***Remarque essentielle :*** *Δx et Δp_x traduisent une indétermination physique, ce n'est pas une question de manque de précision de l'appareil de mesure. Autrement dit, même avec des appareils (fictifs) qui seraient infiniment précis, répéter un grand nombre de fois la même mesure donnerait toujours des résultats qui présenteraient une dispersion Δx et Δp_x.*

- **« Égalité » d'Heisenberg pour un système quantique**

Il s'agit de renverser l'interprétation faite dans les exemples précédents : si un système est quantique, alors les indéterminations de position et quantité de mouvement sont proches de la limite d'Heisenberg.

Si le comportement d'une particule est quantique, alors

$$\Delta x \times p \simeq \hbar$$

Le système est à la limite de l'inégalité d'Heisenberg.

On assimile $\Delta p_x \simeq p = ||\overrightarrow{p}||$ car la projection p_x du vecteur quantité de mouvement peut prendre toutes les valeurs entre $-p$ et p, ce qui entraîne donc une dispersion de l'ordre de p.

Espace 14

III - Particule quantique confinée

Une particule est dite **confinée** lorsqu'elle est contrainte de rester dans une région restreinte de l'espace.

III.1 - Une particule confinée ne peut pas être immobile

- **Vitesse minimale de confinement**

Si l'on mesure les positions de la particule le long d'un axe x, la dispersion Δx est nécessairement inférieure à la taille a de la zone de confinement. D'après le principe d'Heisenberg,

$$p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \geq \frac{\hbar}{a} \qquad \text{soit} \qquad v \geq \frac{\hbar}{m\,a}$$

Espace 15

- **Énergie minimale**

Conventionnellement, on considère presque toujours que l'énergie potentielle minimale est nulle dans la zone de confinement. Ainsi, l'énergie totale minimale est égale à l'énergie cinétique minimale de la particule,

$$E_{\mathrm{c}} \geq \frac{1}{2} m v_{\min}^2 \simeq \frac{1}{2} m \frac{\hbar^2}{m^2\,a^2} \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

L'expression n'est pas à retenir, mais il faut savoir la retrouver.

Espace 16

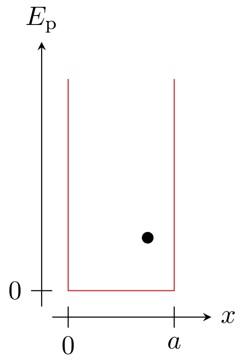
Exercice C2 : Confinement d'un électron dans un atome

Estimer la vitesse minimale d'un électron dans un atome. En déduire son énergie cinétique minimale.

Espace 17

Remarque : *Bien que très qualitatif, ce constat est relié au fait qu'une transformation nucléaire libère plus d'énergie qu'une transformation chimique qui libère elle-même plus d'énergie qu'un changement d'état : le confinement est plus poussé dans le noyau que dans une molécule qu'entre plusieurs molécules d'une même phase.*

III.2 - Confinement et quantification de l'énergie



Considérons le modèle de confinement le plus simple possible : la particule est supposée piégée dans un puits carré infini de largeur a compris entre $x = 0$ et $x = a$. L'hypothèse de puits infini signifie concrètement que la particule ne peut pas en sortir, le fait qu'il soit carré que l'énergie potentielle est constante dans le puits.

Si la particule peut être décrite classiquement : On la place dans le puits avec une certaine vitesse (donc une certaine énergie cinétique). Tant que les frottements sont négligeables, elle parcourt des allers-retours dans le puits en rebondissant sur les côtés car elle ne peut pas sortir du puits.

Si la particule doit être décrite quantiquement : Cela sous-entend donc que $\lambda = h/p \sim a$. Il faut raisonner en termes ondulatoires.

▷ Traduction ondulatoire de « la particule fait des allers-retours » :

Espace 18

▷ Traduction ondulatoire de « la particule ne peut pas sortir du puits » :

Espace 19

Conclusion :

Espace 20

Cette expression n'est pas à retenir mais il faut savoir la retrouver.

Généralisation : la longueur d'onde de de Bröglie d'une particule quantique confinée ne peut prendre que certaines valeurs discrètes, repérées par un entier n.

Cette quantification de la longueur d'onde a également des conséquences énergétiques. Calculons d'abord la quantité de mouvement, qui est aussi quantifiée, puisque

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2a}\,.$$

Calculons maintenant l'énergie cinétique de la particule,

Espace 21

Cette expression est qualitative et n'est pas à retenir, seule la conclusion qui suit l'est.

> ***Remarque :*** *On retrouve la phénoménologie discutée au paragraphe précédent, en particulier le fait que l'énergie est d'autant plus élevée que la particule est confinée. En revanche, on peut constater que les deux expressions de l'énergie minimale (ici $n = 1$) ne sont pas égales. Cela est dû au caractère qualitatif des raisonnements menés.*

Conclusion importante : et à retenir !

L'énergie d'une particule quantique confinée ne peut prendre que certaines valeurs discrètes, repérées par un entier n : on dit que l'énergie de la particule est **quantifiée**.
Les énergies E_n sont appelées **niveaux d'énergie** de la particule (ou du puits).

Le niveau de plus basse énergie est appelé **niveau fondamental**.

La quantification a une double origine :
- ▷ quantique : elle vient du caractère ondulatoire ;
- ▷ confinement : elle vient des conditions aux limites aux bords du puits.

La donnée de l'énergie E_n et de la fonction d'onde ψ_n associée définit l'**état quantique** de la particule.
L'entier n est qualifié de **nombre quantique**.