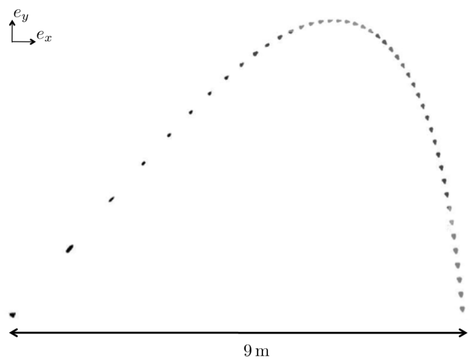
Modélisation de la trajectoire d'un volant de badminton

L'objectif de ce TP mi-physique mi-informatique est d'analyser la force de frottements subie par un volant de badminton à partir de l'étude de sa trajectoire. Nous établirons l'équation du mouvement du volant pour deux modèles de frottements, linéaire et quadratique, et la résoudrons numériquement par la méthode d'Euler. Les résultats obtenus seront ensuite confrontés à la chronophotographie du vol d'un volant.

Données : masse du volant étudié $m = 5{,}3\,\mathrm{g}$; accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

I - Étude de la chronophotographie



Récupérer le fichier image `chronophoto_badminton.png`, extrait d'une thèse [1], et l'ouvrir avec le logiciel ImageJ. Les photos du volant sont prises à intervalle régulier $T_e = 45\,\mathrm{ms}$ avec une caméra rapide, puis toutes superposées sur la même image.

L'objectif de cette première partie est de récupérer dans un fichier texte les coordonnées successives du volant pour pouvoir ensuite les importer sous Python et y visualiser la trajectoire.

I.1 - Pointage sous ImageJ

Imposer une échelle sur l'image. À l'aide de l'outil « ligne droite » tracer une ligne sur l'image entre deux points séparés d'une distance connue. Pour passer des pixels à une longueur physique, aller dans le menu `Analyze` → `Set Scale ...` et indiquer la longueur connue dans la case « known distance ».

Pointer les positions successives de **l'avant** du volant. Utiliser pour cela l'outil « point », et cliquer sur les positions successives du volant tout en maintenant la touche MAJ enfoncée. Une fois toutes les positions sélectionnées, aller dans les menus `Analyze` → `Set Measurements ...` : les résultats s'affichent dans un tableau, qui doit contenir 46 lignes si vous n'avez oublié aucun point.

La première colonne de ce tableau contient le numéro du point, la deuxième sa surface (nulle puisqu'il s'agit d'un point), les trois suivantes des informations sur son niveau de gris, et enfin les deux dernières sont les coordonnées x et y du point que l'on cherche à récupérer.

Enregistrer ce tableau sous forme d'un fichier `pointage.txt`, placé dans le même dossier que celui où vous allez créer votre programme Python. Si le logiciel vous propose un autre format (p.ex. `xls`), remplacez-le par `txt`.

I.2 - Import sous Python

Créer un fichier Python dédié à ce TP dans le *même* dossier que celui où est enregistré votre fichier `pointage.txt`. La lecture et l'écriture de fichiers avec Python sera abordée dans la suite du cours d'informatique.

Importer la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np`, et recopier les lignes suivantes dans votre fichier Python :

```
pointage = np.loadtxt("pointage.txt",skiprows=1)
Xexp = pointage[:,5]
Yexp = pointage[:,6]
```

Ouvrir le fichier `pointage.txt`, par exemple avec le bloc-notes, et afficher dans la console les deux listes `Xexp` et `Yexp`. En déduire ce que font les trois lignes proposées ci-dessus.

1. Thèse de Baptiste Darbois-Texier, réalisée au laboratoire PMMH de l'ESPCI.

I.3 - Affichage de la trajectoire

Importer le module `pyplot` de la bibliothèque `matplotlib` sous l'alias `plt` (`import matplotlib.pyplot as plt`), et afficher la trajectoire expérimentale. Que constatez-vous ?

Définir deux nouvelles listes `x` et `y` (ou deux nouveaux tableaux `numpy`), basées sur les listes `Xexp` et `Yexp`, telles que la position initiale du volant ait pour coordonnées $(0, 0)$ et que les axes soient confortablement orientés. Afficher la « vraie » trajectoire expérimentale : elle servira de référence pour comparer aux modélisations.

II - Modélisation

II.1 - Équation du mouvement

Rappelons que l'objectif du TP est de comparer les trajectoires prévues par deux modèles de frottement à la trajectoire expérimentale pour déterminer lequel est le plus proche de la réalité. Ces deux modèles sont ceux d'une force de frottement linéaire, c'est-à-dire de norme proportionnelle à la vitesse du volant, ou quadratique, c'est-à-dire de norme proportionnelle au carré de sa vitesse :

$$\overrightarrow{F}_{\text{lin}} = -a\overrightarrow{v} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{F}_{\text{quadr}} = -bv\,\overrightarrow{v}$$

où on note $v = ||\overrightarrow{v}||$. Les deux coefficients de frottement a et b sont phénoménologiques, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas connus a priori, et dépendent entre autres de la forme du volant.

Établir l'équation du mouvement du volant pour ces deux modèles de force.

II.2 - Estimation des coefficients de frottement

Sur chacune des deux équations, montrer qu'après une phase transitoire la vitesse du volant tend vers une vitesse limite $\overrightarrow{V}_{\text{lim}}$ verticale. En déduire que la mesure de cette vitesse limite permet de déterminer a et b.

À partir des deux listes de coordonnées `x` et `y`, estimer numériquement les valeurs de a et b. Les conserver sous forme de deux variables globales `a` et `b`, au même titre que g, m ou encore T_{e}. À partir de l'observation de la chronophotographie, indiquer ce qui limite la précision de l'estimation.

II.3 - Estimation de la vitesse initiale

Pour pouvoir résoudre les équations du mouvement par la méthode d'Euler, il est nécessaire de connaître les composantes de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ du volant. En adoptant la même démarche que précédemment, déterminer numériquement `V0x` et `V0y`

II.4 - Résolution de l'équation du mouvement par la méthode d'Euler

Implémenter deux fonctions `acc_lin` et `acc_quadr` prenant comme arguments les deux composantes `Vx` et `Vy` du vecteur vitesse du volant et renvoyant les deux composantes `Ax` et `Ay` de son vecteur accélération, respectivement pour le modèle linéaire et quadratique.

Coder une fonction `euler` capable de résoudre l'équation du mouvement, c'est-à-dire de renvoyer trois listes de même longueur `t` (temps), `Vx` et `Vy` (composantes de la vitesse au cours du temps). Cette fonction prend comme seul argument une fonction `acceleration`, qui prend elle-même les mêmes arguments que `acc_lin` et `acc_quadr`. On rappelle que toutes les autres variables, notamment les conditions initiales, sont définies comme des variables globales puisqu'il s'agit d'analyser la chronophotographie. Choisir un pas de temps $\Delta t = T_{\text{e}}/50$.

En s'inspirant de la méthode d'Euler, écrire une fonction `position` prenant pour arguments deux listes `Vx` et `Vy` contenant les composantes du vecteur vitesse et renvoyant deux listes `X` et `Y` contenant les composantes du vecteur position du volant. On rappelle qu'à l'instant initial le volant se trouve au point de coordonnées $(0, 0)$.

III - Comparaison entre modèle et expérience

En combinant les différentes fonctions, calculer puis représenter les trajectoires prévues par le modèle linéaire et par le modèle quadratique. Conclure sur le meilleur modèle.

L'auteur de la thèse indique une vitesse initiale $V_0 = 40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ formant un angle $\theta_0 = 52°$ avec l'horizontale, et une vitesse limite $V_{\text{lim}} = 6{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Remplacer vos valeurs estimées par celles de l'auteur. Commenter l'influence de ce changement.